Premesse matematiche

2.1 Gradiente

Sia $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ una funzione scalare delle coordinate spaziali (x, y, z). L'ampiezza della funzione $f(x, y, z)$ dipende dal punto di osservazione e risulta in genere costante lungo certe linee o superfici. Si prendano in esame due superfici in cui tale intensità risulta costante e pari a, rispettivamente, f_0 e $f_0 + df$, dove df indica un cambiamento infinitesimo rispetto a f_0. Con riferimento ai punti P_2 e P_3 presenti in Fig. 2.1 è evidente che per una uguale variazione df si hanno due diverse variazioni spaziali dn e $d\ell$. In particolare dn è la più piccola distanza tra le due superfici e, poiché la variazione df è infinitesima, la direzione $\widehat{n}$ risulta ortogonale ad entrambe le superfici. Se con $df/d\ell$ si denota la derivata della funzione f nella direzione $\widehat{\ell}$ e con df/dn la derivata della stessa funzione nella direzione $\widehat{n}$, essendo $dn = d\ell \cos(\alpha)$, la relazione tra le due derivate direzionali risulta

$$\frac{df}{d\ell} = \frac{df}{dn}\frac{dn}{d\ell} = \frac{df}{dn}\frac{d\ell \cos\alpha}{d\ell} = \frac{df}{dn}\cos\alpha\,. \tag{2.1}$$

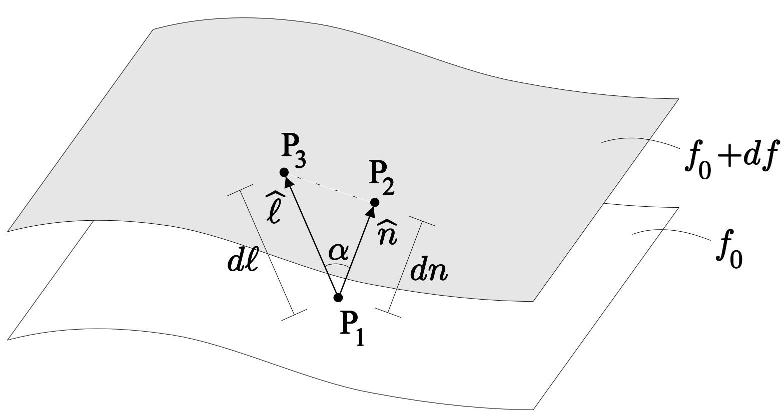

Figura 2.1: Superfici a intensità costante.

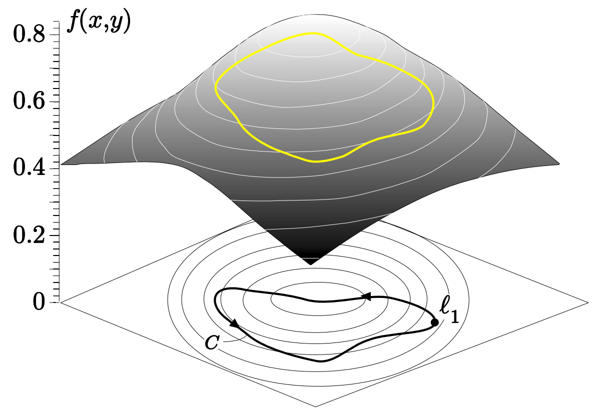

Figura 2.2: Integrazione lungo la curva chiusa C.

E' quindi evidente che la derivata df/dl risulterà massima quando la generica direzione $\widehat{\ell}$ risulterà parallela alla direzione $\widehat{n}$, per cui $\alpha = 0$ e $\cos\alpha = 1$.

Si definisce *gradiente* del campo scalare $f(x, y, z)$ il vettore che rappresenta l'ampiezza e la direzione della variazione spaziale massima:

$$\vec{\nabla} f = \frac{df}{dn}\,\widehat{n}\,. \tag{2.2}$$

E' chiaro che se $\widehat{\ell}$ è una generica direzione dello spazio

$$\vec{\nabla} f \cdot \widehat{\ell} = \frac{df}{dn}\,\widehat{n} \cdot \widehat{\ell} = \frac{df}{dn}\cos\alpha = \frac{df}{d\ell}\,, \tag{2.3}$$

ed inoltre

$$\int_{\ell_1}^{\ell_2} \vec{\nabla} f(\ell) \cdot \widehat{\ell}\, d\ell = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{df(\ell)}{d\ell}\, d\ell = f(\ell_2) - f(\ell_1)\,. \tag{2.4}$$

Quest'ultima relazione mostra che l'integrale curvilineo del gradiente di una funzione scalare della posizione ℓ dipende solo dai valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo di integrazione e non dalla scelta del percorso. In particolare se si considera una curva chiusa C, così come indicato in Fig. 2.2, si otterrà

$$\oint_C \vec{\nabla} f(\ell) \cdot \widehat{\ell}\, d\ell = \int_{\ell_1}^{\ell_1} \vec{\nabla} f(\ell) \cdot \widehat{\ell}\, d\ell = f(\ell_1) - f(\ell_1) = 0\,. \tag{2.5}$$

2.1.1 Gradiente in coordinate cartesiane

Dalla definizione di gradiente in (2.2) il differenziale df è esprimibile come

$$df = \vec{\nabla} f \cdot \widehat{\ell}\, d\ell \,, \tag{2.6}$$

mentre in coordinate cartesiane risulta

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, \widehat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, \widehat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\, \widehat{z} \right) \cdot \left(dx\, \widehat{x} + dy\, \widehat{y} + dz\, \widehat{z} \right) \,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nella precedente espressione l'ultimo termine tra parentesi rappresenta l'elemento differenziale di lunghezza $\widehat{\ell}\, d\ell$ espresso in coordinate cartesiane, per cui:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, \widehat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, \widehat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\, \widehat{z} \right) \cdot \widehat{\ell}\, d\ell \,. \tag{2.8}$$

Confrontando l'eq. (2.6) con la (2.8) è subito evidente che il gradiente in coordinate cartesiane è esprimibile come:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\, \widehat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, \widehat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\, \widehat{z} \,. \tag{2.9}$$

In coordinate cartesiane è quindi possibile definire l'operatore $\vec{\nabla}$ (nabla) come:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\, \widehat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\, \widehat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\, \widehat{z} \,. \tag{2.10}$$

2.1.2 Gradiente in coordinate cilindriche

Procedendo in modo analogo a quanto già fatto per valutare il gradiente in coordinate cartesiane è possibile definire l'operatore nabla in coordinate cilindriche come

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho}\, \widehat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}\, \widehat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\, \widehat{z} \,, \tag{2.11}$$

e da questo il gradiente come $\vec{\nabla} f$.

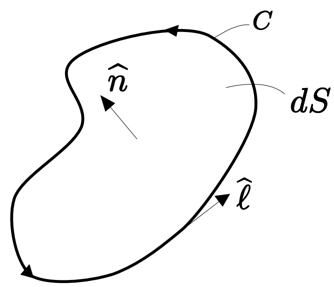

Figura 2.3: Superficie dS racchiusa dal contorno C.

2.1.3 Gradiente in coordinate sferiche

In modo analogo è possibile definire l'operatore nabla in coordinate sferiche come

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\,\widehat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,\widehat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\,\widehat{\phi} \tag{2.12}$$

e da questo il gradiente come $\vec{\nabla} f$.

2.2 Rotore

Sia $\vec{a}(x, y, z)$ un campo vettoriale, cioè una funzione vettoriale dei punti dello spazio, si definisce *rotore* del campo vettoriale $\vec{a}(x, y, z)$ quel vettore la cui componente nella generica direzione $\widehat{n}$ risulta

$$\widehat{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) = \lim_{dS \to 0} \frac{\oint_C \vec{a}(x, y, z) \cdot \widehat{\ell}\, d\ell}{dS}\,, \tag{2.13}$$

dove il verso del versore $\widehat{\ell}$ tangente al contorno C è di rotazione destrorsa rispetto al versore $\widehat{n}$ normale alla superficie dS racchiusa da C (Fig. 2.3). Si noti come la definizione di rotore abbia proprio la forma di un rapporto incrementale; inoltre, nel caso in cui il vettore $\vec{a}$ rappresenti una forza, la circuitazione di tale vettore ($\oint_C \vec{a} \cdot \widehat{\ell} d\ell$) esprime la capacità del campo vettoriale a far ruotare il contorno C intorno al versore $\widehat{n}$.

Si noti come nel caso in cui $\vec{a}(x, y, x) = \vec{\nabla} f(x, y, z)$ si abbia

$$\oint_C \vec{a} \cdot \widehat{\ell}\, d\ell = \oint_C \vec{\nabla} f \cdot \widehat{\ell}\, d\ell = \oint_C \frac{df}{d\ell}\, d\ell = 0 \tag{2.14}$$

e quindi, ricordando la definizione di rotore,

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0\,, \tag{2.15}$$

da cui segue che il rotore del gradiente di una funzione scalare è una funzione nulla. Dualmente, se per un campo vettoriale $\vec{a}$ si verifca la condizione $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$, il campo è detto irrotazionale (o conservativo) e può essere sempre rappresentato come gradiente di una opportuna funzione scalare $f(x,y,z)$, cioè: $\vec{a}(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z)$. Si noti tuttavia che la funzione scalare $f(x,y,z)$ è definita a meno di una costante c, cioè se $g(x,y,z) = f(x,y,z) + c$ si ha

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) + \vec{\nabla} c = \vec{\nabla} f(x,y,z) = \vec{a}(x,y,z)\,, \tag{2.16}$$

essendo nullo il gradiente di una costante ($\vec{\nabla} c = 0$).

2.2.1 Rotore in coordinate cartesiane

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left[\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right]\widehat{x} + \left[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right]\widehat{y} + \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right]\widehat{z} \tag{2.17}$$

2.2.2 Rotore in coordinate cilindriche

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right]\widehat{\rho} + \left[\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right]\widehat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\phi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \phi}\right]\widehat{z} \tag{2.18}$$

2.2.3 Rotore in coordinate sferiche

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{a} = \frac{1}{r\sin\theta}&\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(sin\theta a_\phi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi}\right]\widehat{r} + \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r a_\phi)\right]\widehat{\theta} + \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\widehat{\phi}\end{aligned} \tag{2.19}$$

2.3 Teorema di Stokes

Si consideri una superficie S aperta il cui contorno è una curva chiusa C. La superficie S può essere supposta costituita da N superfici elementari dS_i con $i = 1, 2, \ldots, N$. Si prendano ora in esame due delle N superfici elementari che risultano fra loro adiacenti (ad esempio le superfici dS_1 e dS_2 in Fig. 2.4), per esse risulta:

$$\oint_{C_{12}} \vec{a} \cdot \widehat{i}_c \, d\ell = \oint_{C_1} \vec{a} \cdot \widehat{i}_{c_1} \, d\ell + \oint_{C_2} \vec{a} \cdot \widehat{i}_{c_2} \, d\ell\,, \tag{2.20}$$

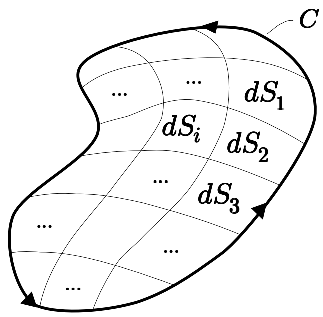

Figura 2.4: Suddivisione della superficie aperta S in superfici elementari.

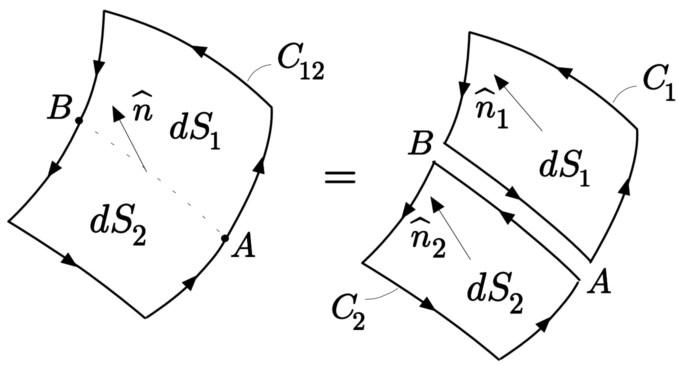

Figura 2.5: Due superfici elementari adiacenti.

in quanto il tratto $\bar{\text{A}}\bar{\text{B}}$ in Fig. 2.5, comune ai due contorni, apporta un contributo uguale ma opposto ai due integrali a secondo membro. Se con C_i si indica il contorno della i–esima superficie elementare dS_i è possibile scrivere

$$\oint_C \vec{a} \cdot \widehat{\ell}\, d\ell = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \vec{a} \cdot \widehat{\ell}\, d\ell = \sum_{i=1}^{N} \frac{\oint_{C_i} \vec{a} \cdot \widehat{\ell}\, d\ell}{dS_i}\, dS_i\,. \tag{2.21}$$

Considerando un numero infinito di superfici elementari ($N \to \infty$) ognuna di esse risulterà infinitesima, $dS_i \to 0$, per cui

$$\oint_C \vec{a} \cdot \widehat{\ell}\, d\ell = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{\nabla} \times \vec{a} \cdot \widehat{n}\right] dS_i = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{a} \cdot \widehat{n}\, dS\,, \tag{2.22}$$

da cui segue il *teorema di Stokes*

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{a} \cdot \widehat{n}\, dS = \oint_C \vec{a} \cdot \widehat{\ell}\, d\ell\,. \tag{2.23}$$

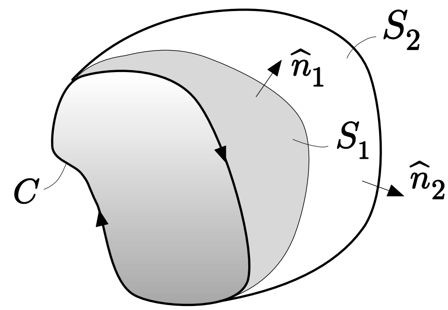

Figura 2.6: Applicazione del teorema di Stokes

Si noti come, con riferimento alla Fig. 2.6, per due qualsiasi superfici S_1 e S_2 aventi stesso contorno C risulta:

$$\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{a} \cdot \widehat{n}\, dS = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{a} \cdot \widehat{n}\, dS\,. \tag{2.24}$$

2.4 Divergenza

Sia $\vec{a}(x,y,z)$ un campo vettoriale. Si definisce $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(x,y,z)$ *divergenza* del campo vettoriale $\vec{a}(x,y,z)$ la quantità scalare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(x,y,z) = \lim_{dV \to 0} \frac{\oint_S \vec{a}(x,y,z) \cdot \widehat{n}\, dS}{dV}\ , \tag{2.25}$$

dove con $\widehat{n}$ si è indicata la normale uscente alla superficie S che racchiude il volume dV (Fig. 2.7).

Si noti che la divergenza del rotore di un campo vettoriale $\vec{b}(x,y,z)$ risulta sempre nulla, cioè $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} = 0$. Si consideri infatti la definizione di divergenza e si supponga la superficie chiusa S composta da due superfici aperte (Fig. 2.8), rispettivamente S_1 e S_2, da ciò segue:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} &= \lim_{dV \to 0} \frac{\oint_S \vec{\nabla} \times \vec{b} \cdot \widehat{n}\, dS}{dV} = \\ &= \lim_{dV \to 0} \frac{\int_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{b} \cdot \widehat{n}\, dS + \int_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{b} \cdot \widehat{n}\, dS}{dV}\,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Applicando il teorema di Stokes gli integrali di superficie che appaiono nell'ultimo membro della precedente equazione possono essere scritti in termini di circuitazione sul contorno C_1 di versore tangente $\widehat{\ell}_1$ e sul contorno C_2 di

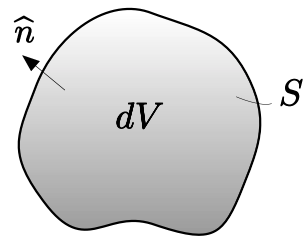

Figura 2.7: Volume dV racchiuso dalla superficie chiusa S

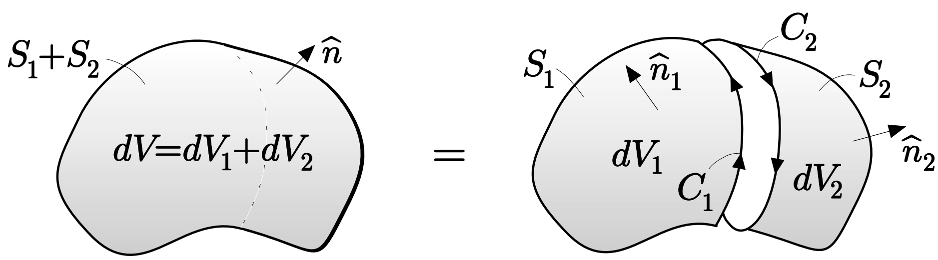

Figura 2.8: Scomposizione della superficie S in due superfici S_1 e S_2

versore tangente $\widehat{\ell}_2$. Per come sono state costruite le due superfici i rispettivi contorni coincideranno $C_1 = C_2 = C$ ma saranno percorsi in senso opposto, per cui $\widehat{\ell}_1 = -\widehat{\ell}_2$, da cui:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} = \lim_{dV \to 0} \frac{\oint_{C_1} \vec{b} \cdot \widehat{\ell}_1 \, d\ell + \oint_{C_2} \vec{b} \cdot \widehat{\ell}_2 \, d\ell}{dV} = \\ = \lim_{dV \to 0} \frac{\oint_{C} \vec{b} \cdot \widehat{\ell}_1 \, d\ell - \oint_{C} \vec{b} \cdot \widehat{\ell}_1 \, d\ell}{dV} = 0 \, . \quad (2.27)$$

Dualmente, se per un campo vettoriale $\vec{a}(x, y, z)$ si verifca la condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(x, y, z) = 0$ il campo è detto solenoidale ed è sempre possibile trovare un campo vettoriale $\vec{b}(x, y, z)$ tale che $\vec{a}(x, y, z) = \vec{\nabla} \times \vec{b}(x, y, z)$. Si noti che il campo vettoriale $\vec{b}(x, y, z)$ è definito a meno del gradiente di una funzione scalare $\psi(x, y, z)$; infatti, posto $\vec{b}'(x, y, z) = \vec{b}(x, y, z) + \vec{\nabla}\psi(x, y, z)$, si ha

$$\vec{\nabla} \times \vec{b}'(x, y, z) = \vec{\nabla} \times \vec{b}(x, y, z) + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi(x, y, z) = \vec{a}(x, y, z) \, , \qquad (2.28)$$

essendo $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi(x, y, z) = 0$ per ogni funzione scalare $\psi(x, y, z)$.

2.4.1 Divergenza in coordinate cartesiane

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{2.29}$$

2.4.2 Divergenza in coordinate cilindriche

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{2.30}$$

2.4.3 Divergenza in coordinate sferiche

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta a_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} \tag{2.31}$$

2.5 Teorema di Gauss

Procedendo in modo analogo a quanto già visto per il teorema di Stokes è possibile pensare un generico volume V racchiuso da una superficie S come composto da N volumi elementari dV_i ciascuno racchiuso da una superficie dS_i di normale uscente $\widehat{n}_i$. In particolare, se si considerano due volumi elementari adiacenti dV_i e dV_j racchiusi rispettivamente dalle superfici dS_i e dS_j è immediato verificare che il flusso del campo vettoriale $\vec{a}(x,y,z)$ attraverso la superficie dS_{ij}, che racchiude entrambi i volumi, è esprimibile come somma dei flussi dello stesso campo attraverso le superfici che racchiudono i singoli volumi, cioè:

$$\oint_{dS_{ij}}\vec{a}\cdot\widehat{n}\,dS=\oint_{dS_i}\vec{a}\cdot\widehat{n}_i\,dS+\oint_{dS_j}\vec{a}\cdot\widehat{n}_j\,dS\,. \tag{2.32}$$

Applicando tale proprietà a tutti i volumi elementari in cui è stato suddiviso il volume V, si ottiene:

$$\oint_S\vec{a}\cdot\widehat{n}\,dS=\sum_{i=1}^{N}\oint_{dS_i}\vec{a}\cdot\widehat{n}_i\,dS=\sum_{i=1}^{N}\frac{\oint_{dS_i}\vec{a}\cdot\widehat{n}_i\,dS}{dV_i}\,dV_i\,. \tag{2.33}$$

Considerando un numero infinito di volumi elementari ($N\to\infty$) ognuno di essi risulterà infinitesimo, $d\mathrm{V}_i\to 0$, per cui

$$\oint_S\vec{a}\cdot\widehat{n}\,dS=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right]\,dV_i=\int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\,dV\,, \tag{2.34}$$

da cui segue il *teorema di Gauss*

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \, dV = \oint_S \vec{a} \cdot \widehat{n} \, dS \, . \tag{2.35}$$

2.6 Laplaciano scalare

Se $f(x, y, z)$ è un campo scalare allora si definisce *Laplaciano scalare* lo scalare

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f(x, y, z) \, , \tag{2.36}$$

dove l'operatore differenziale ∇^2 viene chiamato *Laplaciano.*

2.6.1 Laplaciano scalare in coordinate cartesiane

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2.37}$$

2.6.2 Laplaciano scalare in coordinate cilindriche

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2.38}$$

2.6.3 Laplaciano scalare in coordinate sferiche

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{2.39}$$

2.7 Laplaciano vettoriale

Se $\vec{a}(x, y, z)$ è un campo vettoriale allora si definisce *Laplaciano vettoriale* il vettore

$$\nabla^2 \vec{a}(x, y, z) = \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(x, y, z) \right] - \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) \right] \, . \tag{2.40}$$

In generale l'espressione del Laplaciano vettoriale risulta complessa; tuttavia nel caso in cui si operi in un sistema di coordinate cartesiano esso è valutabile come la somma dei laplaciani scalari delle singole componenti cartesiane a_x, a_y, a_z del campo vettoriale $\vec{a}$, cioè:

$$\nabla^2 \vec{a} = \nabla^2 a_x \widehat{x} + \nabla^2 a_y \widehat{y} + \nabla^2 a_z \widehat{z} \, . \tag{2.41}$$