Il plasma

Il plasma è un aggregato complessivamente neutro di cariche negative, positive ed eventualmente anche neutre. Un tipico esempio di plasma è dato dalla ionosfera terrestre, una fascia che si estende dai 50 ai 500 Km s.l.m., in cui le cariche negative sono costituite da elettroni prodotti per ionizzazione dalle radiazioni ultraviolette e dai raggi cosmici, mentre le cariche positive sono costituite dagli atomi ionizzati e quelle neutre dagli atomi non ionizzati.
La rigorosa analisi elettromagnetica e stocastica del plasma risulta molto complessa. Si può tuttavia studiarne il comportamento introducendo immediatamente grandezze mediate su piccoli volumi ma comprendenti un gran numero di cariche.
Si sostituisce cioè ad un insieme discreto di cariche un fluido equivalente (gas elettronico) e si parla di una descrizione fluidodinamica del plasma.
Nel caso poi in cui le frequenze in gioco non siano troppo basse e la massa di una delle due particelle cariche sia molto maggiore dell'altra si può considerare la prima fissa nella sua posizione e

si parla di gas ad un solo costituente.
Questo è il caso della ionosfera in cui la massa degli ioni è circa 1820 volte maggiore di quella degli elettroni.
Il gas elettronico è caratterizzato da una densità di carica per unità di volume Nq e da una densità di massa per unità di volume Nm, dove con N si indica il numero di cariche (elettroni per la ionosfera) per unità di volume. Si definisce inoltre una pressione media in condizioni di equilibrio p_0 ed una eventuale variazione di pressione Δp in condizioni perturbate con $\Delta p \ll p_0$, e la frequenza di collisione ν fra le cariche dovuta all'agitazione termica la quale è responsabile di dissipazione di energia.
Nel caso in cui gli effetti del gradiente di pressione possono essere trascurati si parla di plasma freddo; nel caso poi in cui anche la frequenza ν di collisione sia trascurabile si parla di plasma freddo senza collisioni.
Nel caso di un campo elettromagnetico che si propaga in un plasma freddo senza collisioni su questo agirà una forza per unità di volume che, dalla relazione di Lorentz, risulta pari a

$$\vec{f}(\vec{r},t) = Nq\left\{\vec{e}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t) \times \vec{b}(\vec{r},t)\right\}$$

dove con $\vec{v}(\vec{r},t)$ si è indicata la velocità media delle cariche nel punto $\vec{r}$ al tempo t.
Quindi dalla seconda equazione della dinamica:

$$Nm\,\frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} = Nq\left\{\vec{e}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t) \times \vec{b}(\vec{r},t)\right\}.$$

In quest'ultima relazione il prodotto vettoriale tra velocità media e vettore induzione magnetica è generalmente trascurabile, almeno per velocità non troppo alte ($v \ll c$) e plasmi non troppo densi, rispetto al campo elettrico.
Inoltre sotto l'effetto del campo sarà presente una densità di corrente di convezione esprimibile come:

$$\vec{J}_c(\vec{r},t) = Nq\,\vec{v}(\vec{r},t).$$

Passando nel dominio della frequenza e sostituendo quest'ultimo risultato nel precedente si ha

$$\vec{J}_c(\vec{r},\omega) = \frac{Nq^2}{j\omega m}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)$$

Si consideri adesso la seconda equazione di Maxwell nel dominio della frequenza

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r},\omega) = j\omega\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},\omega) + \vec{J}_c(\vec{r},\omega) =$$

$$= j\omega\varepsilon_0 \left\{ 1 - \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \right\} \vec{E}(\vec{r},\omega).$$

È quindi possibile definire una permettività dielettrica equivalente del plasma

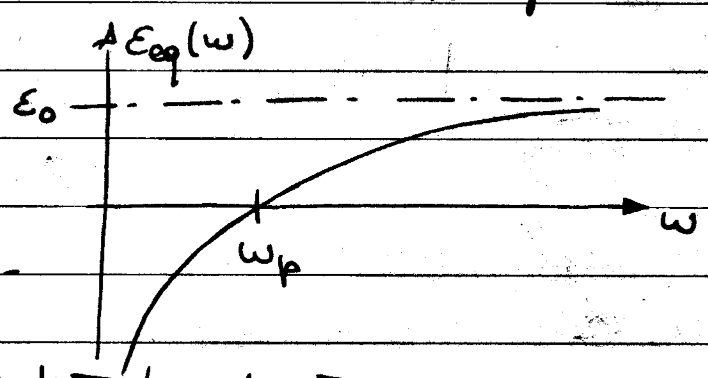
$$\varepsilon_{eq} \triangleq \varepsilon_0 \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right\}$$

dove con ω_p si è definita la pulsazione del plasma come

$$\omega_p \triangleq \sqrt{\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}}.$$

Si noti come il mezzo risulta funzione della frequenza e perciò dispersivo nel tempo.

Graficamente è subito evidente che per $\omega < \omega_p$ la permettività equivalente $\varepsilon_{eq}(\omega) < 0$ mentre per $\omega > \omega_p$ essa risulterà positiva e per $\omega \to \infty$ tale permettività tenderà a quella del vuoto ($\lim_{\omega \to \infty} \varepsilon_{eq}(\omega) \to \varepsilon_0$)

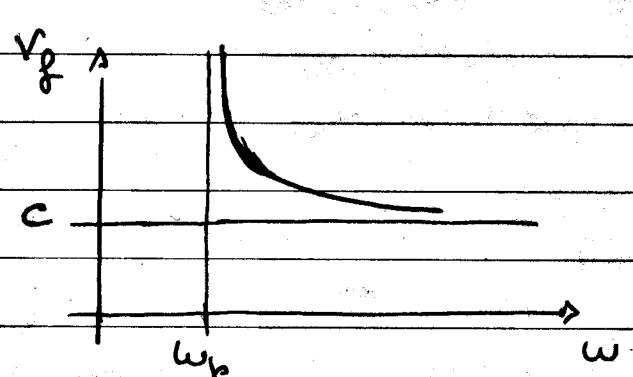


Si consideri adesso un'onda piana che si propaga all'interno di un tale mezzo. Per $\omega > \omega_p$ la costante di propagazione risulterà puramente reale e coincidente con la costante di fase

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_{eq}\mu_0} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \beta(\omega) \in \mathbb{R}^+$$

Quindi tale onda piana si propagherà liberamente nel plasma anche se con costante di fase $\beta(\omega)$ che varierà non più linearmente al variare della pulsazione ω (cioè della frequenza di lavoro). In particolare si noti come la velocità di fase sia ora anch'essa funzione della frequenza e risulti maggiore della velocità della luce nel vuoto c:

$$v_f \triangleq \frac{\omega}{\beta(\omega)} = c\,\frac{1}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}} > c \quad \text{per } \omega > \omega_p$$



Nel caso in cui invece $\omega < \omega_p$ la costante di propagazione risulterà puramente immaginaria

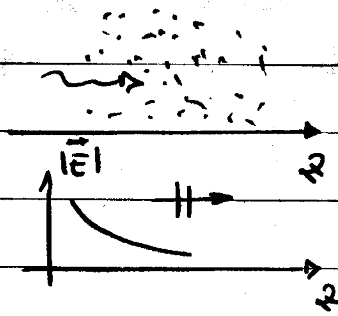
$$K = \omega\sqrt{\varepsilon_{eq}\,\mu_0} = -j\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1} = -j\alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R}^+$

dove il segno meno è stato scelto in modo tale da avere un'onda piana che si attenui nella presunta direzione di propagazione. Si noti tuttavia che tale onda nel plasma non si propaga ma si attenua solamente in modo esponenziale:

$$\vec{E}(z,\omega) = \vec{E}_0(\omega)\, e^{-jKz} =$$

$$= \vec{E}_0(\omega)\, e^{-\alpha z}$$



Infatti se si calcola il vettore di Poynting associato a tale onda si avrà

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\,\frac{|E(z,\omega)|^2}{\zeta_p^*}\,\hat{z}$$

ma $$\zeta_p = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{eq}}} = \zeta_0\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \zeta_0 \Big/ \Big(-j\underbrace{\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}}_{\in \mathbb{R}^+}\Big) =$$

$$= j\,|\zeta_p|$$

perciò l'ampiezza del vettore di Poynting risulterà puramente immaginaria

$$\vec{S}\cdot\hat{z} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{E}|^2}{\eta_p^*} = -j\frac{1}{2}\frac{|\vec{E}|^2}{|\eta_p|} = -js$$

con $s \in \mathbb{R}^+$

Ne risulta che per $\omega < \omega_p$ all'interno del plasma si misurerà solo potenza reattiva. Si avrà quindi solo uno scambio energetico periodico a senso alterno tra sorgenti e plasma, senza alcuna propagazione dell'onda e quindi senza trasporto di potenza attiva. Nel caso invece in cui $\omega > \omega_p$ l'impedenza caratteristica del plasma η_p risulterà puramente reale, per cui la ampiezza del vettore di Poynting risulterà tutta reale. Quindi associata all'onda, che si propagherà nel plasma senza subire attenuazioni, sarà associata solo potenza attiva.