3.1 Riflessione e rifrazione di un'onda piana alla superficie di discontinuità fra due mezzi: incidenza obliqua

Si considerino due mezzi lineari, isotropi, omogenei, stazionari, seminfiniti e separati da una superficie S piana (Fig. 3.1). Il mezzo 1 è caratterizzato da $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ mentre il mezzo 2 da $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Si definisce:

- O l'origine di un sistema di riferimento appartenente alla superficie S di separazione tra i due mezzi;
- $\hat{n}$ il versore normale alla superficie S diretto dal mezzo 2 al mezzo 1;
- $\vec{r}$ il vettore congiungente l'origine O con un generico punto P dello spazio, $\vec{r} = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$

Si consideri poi una generica onda piana, avente direzione di propagazione $\hat{i}_{k_1}$, proveniente dal mezzo 1 ed incidente sulla superficie S. Il campo associato a tale onda è esprimibile tramite le relazioni

$$\vec{E}^i = \vec{E}_+^{(1)} e^{-jk_1 \hat{i}_{k_1} \cdot \vec{r}} \,,$$
$$\vec{H}^i = \frac{1}{\zeta_1} \hat{i}_{k_1} \times \vec{E}^i \,,$$

dove k_1 e ζ_1 sono rispettivamente la costante di propagazione e l'impedenza caratteristica del mezzo 1, mentre $\vec{E}_+^{(i)}$ è l'ampiezza dell'onda incidente.

Si definisca inoltre *piano di incidenza* il piano contenente i versori $\hat{n}$ e $\hat{i}_{k_1}$, per cui cioè $\vec{r} \cdot (\hat{n} \times \hat{i}_{k_1}) = 0$. Si può facilmente ipotizzare che l'onda piana incidente origini un'onda riflessa nel mezzo 1 e una trasmessa nel mezzo 2, anche esse piane, le cui direzioni di propagazione giacciono sul piano di incidenza. Il campo elettromagnetico associato all'onda piana riflessa risulta

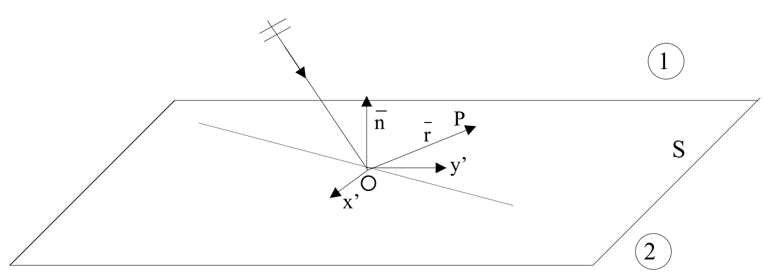

Figura 3.1: Riflessione e rifrazione di un'onda piana alla superficie di discontinuità fra due mezzi: geometria del problema.

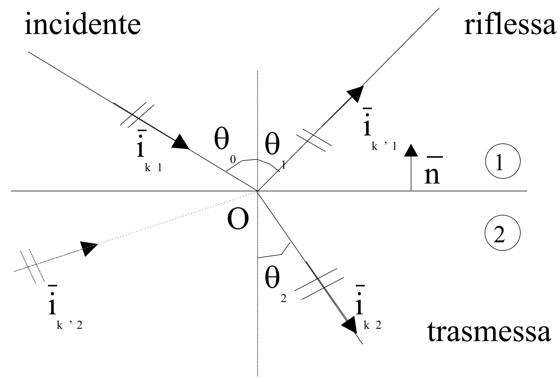

Figura 3.2: Riflessione e rifrazione di un'onda piana alla superficie di discontinuità fra due mezzi: geometria del problema sul piano di incidenza.

$$\vec{E}^r = \vec{E}_-^{(1)} e^{-jk_1 \hat{i}_{k_1'} \cdot \vec{r}}, \tag{3.1}$$

$$\vec{H}^r = \frac{1}{\zeta_1} \hat{i}_{k_1'} \times \vec{E}^r, \tag{3.2}$$

mentre quello dell'onda trasmessa

$$\vec{E}^t = \vec{E}_+^{(2)} e^{-jk_2 \hat{i}_{k_2} \cdot \vec{r}}, \tag{3.3}$$

$$\vec{H}^t = \frac{1}{\zeta_2} \hat{i}_{k_2} \times \vec{E}^t. \tag{3.4}$$

Nel mezzo 2, a rigore, dovremmo considerare anche un'onda proveniente da $z = -\infty$ con direzione di propagazione $\hat{i}_{k_2'}$. Essendo tuttavia il mezzo 2 indefinito per $z \to -\infty$ e non essendo presente alcuna sorgente in $z = -\infty$ tale onda, al fine di verificare la condizione di radiazione all'infinito, avrà ampiezza nulla. Sulla superficie di separazione dei due mezzi dovranno essere verificate le seguenti condizioni al contorno

$$\hat{n} \times (\vec{E}^i(\vec{r}) + \vec{E}^r(\vec{r}))\Big|_{\vec{r} \in S} = \hat{n} \times \vec{E}^t(\vec{r})\Big|_{\vec{r} \in S}, \tag{3.5}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}^i(\vec{r}) + \vec{H}^r(\vec{r}))\Big|_{\vec{r} \in S} = \hat{n} \times \vec{H}^t(\vec{r})\Big|_{\vec{r} \in S}. \tag{3.6}$$

Sostituendo nella eq. (3.5) le espressioni dei campi elettrici delle onde incidente, riflessa e trasmessa, si ottiene

$$\hat{n} \times \vec{E}_+^{(1)} \exp(-jk_1 \hat{i}_{k_1} \cdot \vec{r}) + \hat{n} \times \vec{E}_-^{(1)} \exp(-jk_1 \hat{i}_{k_1'} \cdot \vec{r}) = \\ = \hat{n} \times \vec{E}_+^{(2)} \exp(-jk_2 \hat{i}_{k_2} \cdot \vec{r}), \tag{3.7}$$

con $\vec{r} \in S$. Poiché $\hat{n} \times (\vec{r} \times \hat{n}) = \vec{r} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})$ è possibile esprimere il vettore $\vec{r}$ tramite la relazione

$$\vec{r} = \hat{n} \times (\vec{r} \times \hat{n}) + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r}) \,, \tag{3.8}$$

in cui il doppio prodotto vettoriale $\hat{n} \times (\vec{r} \times \hat{n})$ rappresenta la componente del vettore $\vec{r}$ tangenziale alla superficie di separazione S, mentre $\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})$ la componente ad essa normale. Richiedere che $\vec{r} \in S$ equivale a richiedere che sulla superficie S sia verificata la condizione $\hat{n} \cdot \vec{r} = 0$, quindi

$$\hat{i}_k \cdot \vec{r}\Big|_{\vec{r} \in S} = \hat{i}_k \cdot \hat{n} \times (\vec{r} \times \hat{n}) + \hat{i}_k \cdot \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})\Big|_{\hat{n} \cdot \vec{r} = 0} = (\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\hat{i}_k \times \hat{n}) \,. \tag{3.9}$$

L'equazione (3.7) può essere ora scritta nella forma

$$\begin{aligned} &(\hat{n} \times \vec{E}_+^{(1)}) \exp\Big[-jk_1(\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\hat{i}_{k_1} \times \hat{n})\Big] + \\ &\quad + (\hat{n} \times \vec{E}_-^{(1)}) \exp\Big[-jk_1(\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\hat{i}_{k_1'} \times \hat{n})\Big] = \\ &\qquad = (\hat{n} \times \vec{E}_+^{(2)}) \exp\Big[-jk_2(\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\hat{i}_{k_2} \times \hat{n})\Big] \,, \qquad \forall \vec{r} \in S \,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Poiché $\vec{E}_+^{(1)}, \vec{E}_-^{(1)}, \vec{E}_+^{(2)}$ non sono funzioni della posizione $\vec{r}$ e la precedente relazione deve essere verificata $\forall \vec{r} \in S$ è necessario che gli argomenti degli esponenziali siano identici, cioè

$$k_1(\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\hat{i}_{k_1} \times \hat{n}) = \tag{3.11a}$$

$$= k_1(\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\hat{i}_{k_1'} \times \hat{n}) = \tag{3.11b}$$

$$= k_2(\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\hat{i}_{k_2} \times \hat{n}) \tag{3.11c}$$

Per l'arbitrarietà del vettore $\vec{r} \in S$ l'uguaglianza delle espressioni (3.11a) e (3.11b) conduce alla relazione

$$\hat{i}_{k_1} \times \hat{n} = \hat{i}_{k_1'} \times \hat{n} \,. \tag{3.12}$$

Definendo con θ_0 l'angolo compreso tra i versori $\hat{n}$ e $\hat{i}_{k_1}$ e con θ_1 quello compreso tra i versori $\hat{n}$ e $\hat{i}_{k_1'}$ segue che (prima legge di Snell)

$$\sin\theta_0 = \sin\theta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_0 = \theta_1 \,. \tag{3.13}$$

Analogamente richiedere che sia verificata l'uguaglianza tra le espressioni (3.11a) e (3.11c) equivale a richiedere che

$$k_1(\hat{i}_{k_1} \times \hat{n}) = k_2(\hat{i}_{k_2} \times \hat{n}) \,,$$

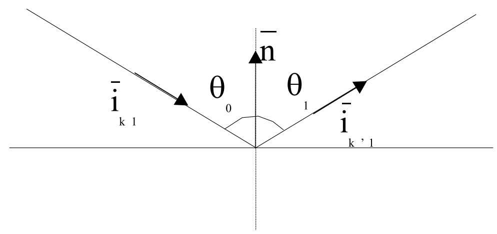

Figura 3.3: Geometria dell'onda diretta e riflessa.

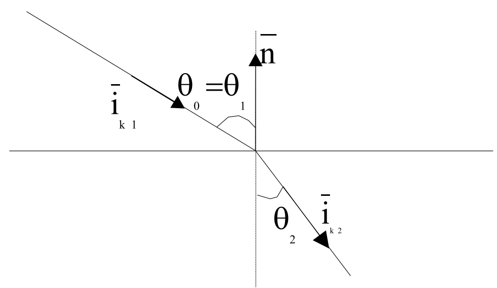

Figura 3.4: Geometria dell'onda diretta e trasmessa.

da cui definendo θ_2 l'angolo compreso tra i versori $(-\hat{n})$ e $\hat{i}_{k_2}$ risulta (seconda legge di Snell)

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \,. \tag{3.14}$$

Quest'ultima relazione è generalmente espressa in termini dell'*indice di rifrazione assoluto* definito come[1]:

$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}\,, \tag{3.15}$$

per cui dividendo ambo i membri della eq. (3.14) per k_0 si ottiene

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \,. \tag{3.16}$$

Nel caso che i mezzi siano privi di perdite ($n \in \mathbb{R}^+$) si individuano i seguenti due casi

[1]Nel caso di mezzo dielettrico ($\mu \simeq \mu_0$) per cui

$$n \simeq \frac{\omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0}}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r}\,.$$

- $\boxed{\text{caso } n_1 < n_2}$

  Il mezzo in cui è trasmessa l'onda è più denso di quello di provenienza e l'angolo θ_2 risulta sempre reale per ogni valore reale dell'angolo $\theta_1 \in (0, \pi/2)$ di incidenza. Infatti essendo il rapporto $n_1/n_2 < 1$ si ottiene:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 < 1\,, \qquad \forall\theta_1 \in (0, \pi/2)\,.$$

- $\boxed{\text{caso } n_1 > n_2}$

  Il mezzo di provenienza è più denso di quello in cui l'onda è trasmessa e l'angolo θ_2 risulta reale solo per alcuni valori dell'angolo di incidenza $\theta_1 \in (0, \pi/2)$. In particolare ciò si verifica per gli angoli di incidenza θ_1 minori dell'angolo critico θ_c definito come l'angolo per cui

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_c = 1\,,$$

  cioè

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\,.$$

  Quindi per

  - $\theta_1 < \theta_c$

    esiste un angolo $\theta_2 \in \mathbb{R}$ per cui $\hat{i}_{k_2} \in \mathbb{R}$ e l'onda trasmessa nel mezzo 2 risulta *omogenea*;
  - $\theta_1 > \theta_c$

    l'angolo $\theta_2 \in \mathbb{C}$, la direzione di propagazione dell'onda trasmessa è complessa e l'onda risulta *non omogenea.*

Nel caso in cui un'onda piana non incida ortogonalmente sulla superficie di separazione S tra due mezzi aventi caratteristiche elettriche e/o magnetiche diverse è sempre possibile definire un piano di incidenza contenente sia il versore di propagazione che quello normale al piano di separazione S. Inoltre, data la linearità del problema, è possibile considerare una generica onda piana incidente avente polarizzazione arbitraria come sovrapposizione di due onde piane (Fig. 3.5)

$\perp$ una con campo elettrico perpendicolare al piano di incidenza (o onda Trasversa Elettrica rispetto alla normale alla superficie di separazione in quanto il campo elettrico è tutto trasverso rispetto a tale normale);

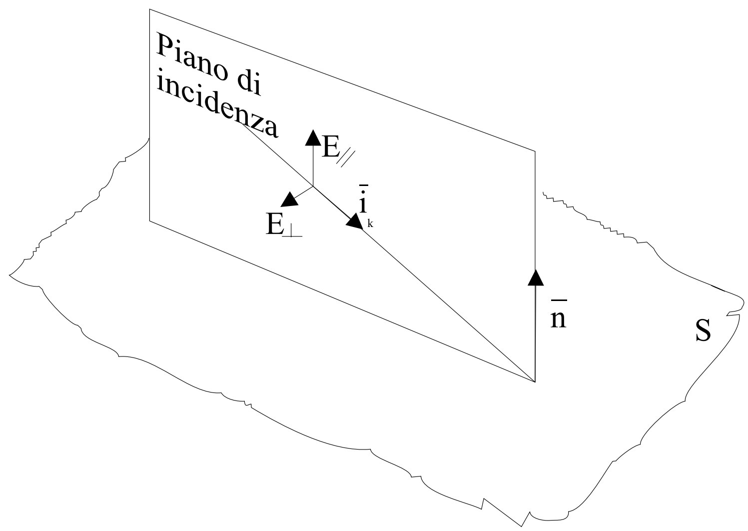

Figura 3.5: Scomposizione nelle componenti ortogonale e parallela dell'onda piana incidente.

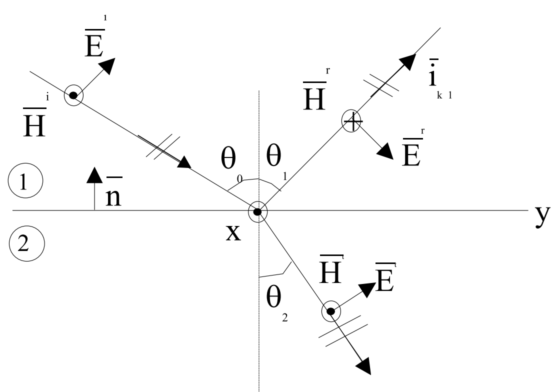

Figura 3.6: Polarizzazione parallela: geometria del problema.

$\|$ una con campo elettrico parallelo al piano di incidenza (o onda Trasversa Magnetica rispetto alla normale alla superficie di separazione in quanto il campo magnetico è tutto trasverso rispetto a tale normale).

Il campo riflesso e trasmesso possono essere quindi studiati come sovrapposizione dei campi generati dalle componenti parallela e perpendicolare dell'onda piana incidente.

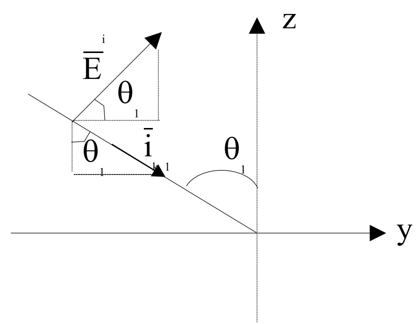

Figura 3.7: Polarizzazione parallela: campo incidente.

3.2 Polarizzazione Parallela

- **Campo incidente**

$$\vec{E}^i = \vec{E}_+^{(1)} e^{-jk_1 \hat{i}_{k_1} \cdot \vec{r}}, \tag{3.17}$$

$$\vec{H}^i = \frac{1}{\zeta_1} \hat{i}_{k_1} \times \vec{E}^i, \tag{3.18}$$

con $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ e

$$\vec{E}_+^{(1)} = E_+^{(1)} (\cos\theta_1 \hat{y} + \sin\theta_1 \hat{z}), \qquad E_+^{(1)} \in \mathbb{C} \tag{3.19}$$

$$\hat{i}_{k_1} = \sin\theta_1 \hat{y} - \cos\theta_1 \hat{z}. \tag{3.20}$$

Quindi

$$\vec{E}^i = E_+^{(1)} (\cos\theta_1 \hat{y} + \sin\theta_1 \hat{z}) e^{-jk_1 \sin\theta_1 y} e^{jk_1 \cos\theta_1 z}, \tag{3.21}$$

$$\vec{H}^i = \frac{E_+^{(1)}}{\zeta_1} \hat{x} e^{-jk_1 \sin\theta_1 y} e^{jk_1 \cos\theta_1 z}. \tag{3.22}$$

- **Campo riflesso**

$$\vec{E}^r = \vec{E}_-^{(1)} e^{-jk_1 \hat{i}_{k'_1} \cdot \vec{r}}, \tag{3.23}$$

$$\vec{H}^r = \frac{1}{\zeta_1} \hat{i}_{k'_1} \times \vec{E}^r, \tag{3.24}$$

con

$$\vec{E}_-^{(1)} = E_-^{(1)} (\cos\theta_1 \hat{y} - \sin\theta_1 \hat{z}), \qquad E_-^{(1)} \in \mathbb{C} \tag{3.25}$$

$$\hat{i}_{k'_1} = \sin\theta_1 \hat{y} + \cos\theta_1 \hat{z}. \tag{3.26}$$

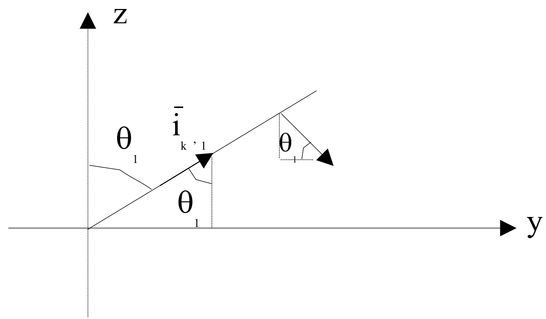

Figura 3.8: Polarizzazione parallela: campo riflesso.

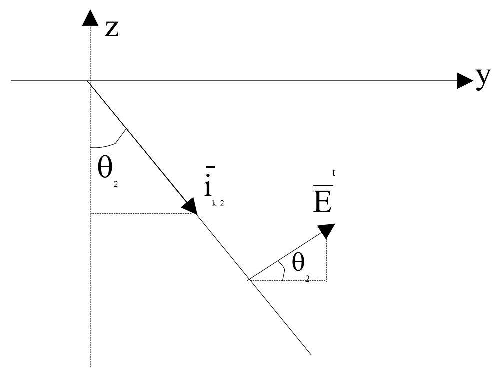

Figura 3.9: Polarizzazione parallela: campo trasmesso.

Quindi

$$\vec{E}^r = E_-^{(1)}(\cos\theta_1\hat{y} - \sin\theta_1\hat{z})e^{-jk_1\sin\theta_1 y}e^{-jk_1\cos\theta_1 z}\,, \tag{3.27}$$

$$\vec{H}^r = -\frac{E_-^{(1)}}{\zeta_1}\hat{x}e^{-jk_1\sin\theta_1 y}e^{-jk_1\cos\theta_1 z}\,. \tag{3.28}$$

- **Campo trasmesso**

$$\vec{E}^t = \vec{E}_+^{(2)}e^{-jk_2\hat{i}_{k_2}\cdot\vec{r}}\,, \tag{3.29}$$

$$\vec{H}^t = \frac{1}{\zeta_2}\hat{i}_{k_2}\times\vec{E}^t\,, \tag{3.30}$$

con

$$\vec{E}_+^{(2)} = E_+^{(2)}(\cos\theta_2\hat{y} + \sin\theta_2\hat{z})\,, \qquad E_+^{(2)} \in \mathbb{C}\,, \tag{3.31}$$

$$\hat{i}_{k_2} = \sin\theta_1\hat{y} - \cos\theta_1\hat{z}\,. \tag{3.32}$$

Quindi

$$\vec{E}^t = E_+^{(2)}(\cos\theta_2\hat{y} + \sin\theta_2\hat{z})e^{-jk_2\sin\theta_2 y}e^{jk_2\cos\theta_2 z}\,, \tag{3.33}$$

$$\vec{H}^t = \frac{E_+^{(2)}}{\zeta_2}\hat{x}e^{-jk_2\sin\theta_2 y}e^{jk_2\cos\theta_2 z}\,. \tag{3.34}$$

Imponendo le condizioni al contorno all'interfaccia tra i due mezzi ($z = 0$) si ottiene $\forall y$

$$E_+^{(1)}\cos\theta_1 e^{-jk_1\sin\theta_1 y} + E_-^{(1)}\cos\theta_1 e^{-jk_1\sin\theta_1 y} = E_+^{(2)}\cos\theta_2 e^{-jk_2\sin\theta_2 y}\,, \tag{3.35}$$

$$\frac{E_+^{(1)}}{\zeta_1}e^{-jk_1\sin\theta_1 y} - \frac{E_-^{(1)}}{\zeta_1}e^{-jk_1\sin\theta_1 y} = \frac{E_+^{(2)}}{\zeta_2}e^{-jk_2\sin\theta_2 y}\,. \tag{3.36}$$

Utilizzando la seconda legge di Snell, cioè $k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_2$, la precedente equazione si riduce alla

$$E_+^{(1)}\cos\theta_1 + E_-^{(1)}\cos\theta_1 = E_+^{(2)}\cos\theta_2\,, \tag{3.37}$$

$$\frac{E_+^{(1)}}{\zeta_1} - \frac{E_-^{(1)}}{\zeta_1} = \frac{E_+^{(2)}}{\zeta_2}\,, \tag{3.38}$$

da cui, risolvendo rispetto alle ampiezze dell'onda riflessa e trasmessa, si ottiene

$$E_-^{(1)} = E_+^{(1)}\frac{\zeta_2\cos\theta_2 - \zeta_1\cos\theta_1}{\zeta_2\cos\theta_2 + \zeta_1\cos\theta_1}\,, \tag{3.39}$$

$$E_+^{(2)} = E_+^{(1)}\frac{2\zeta_2\cos\theta_1}{\zeta_2\cos\theta_2 + \zeta_1\cos\theta_1}\,. \tag{3.40}$$

Si definisce coefficiente di riflessione parallela lo scalare

$$\Gamma_\parallel = \frac{\vec{E}^r\cdot\hat{y}}{\vec{E}^i\cdot\hat{y}} = \frac{E_-^{(1)}\cos\theta_1}{E_+^{(1)}\cos\theta_1} = \frac{\zeta_2\cos\theta_2 - \zeta_1\cos\theta_1}{\zeta_2\cos\theta_2 + \zeta_1\cos\theta_1}\,, \tag{3.41}$$

mentre coefficiente di trasmissione parallela la quantità

$$\tau_\parallel = \frac{\vec{E}^t\cdot\hat{y}}{\vec{E}^i\cdot\hat{y}} = \frac{E_-^{(2)}\cos\theta_2}{E_+^{(1)}\cos\theta_1} = \frac{2\zeta_2\cos\theta_2}{\zeta_2\cos\theta_2 + \zeta_1\cos\theta_1}\,, \tag{3.42}$$

da cui risulta $\tau_\parallel = 1 + \Gamma_\parallel$. Per il riferimento assunto in Fig. 3.6 risulta

$$E_-^{(1)} = E_+^{(1)}\Gamma_\parallel\,, \tag{3.43}$$

$$E_+^{(2)} = E_+^{(1)}\tau_\parallel\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\,. \tag{3.44}$$

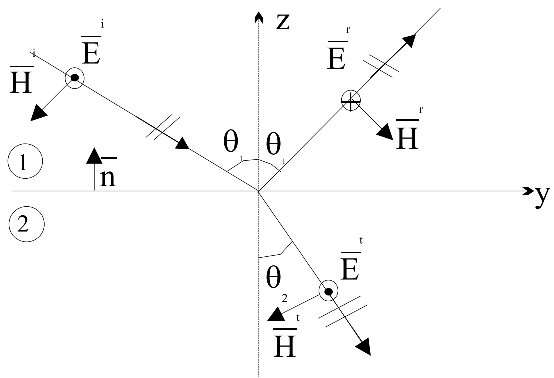

Figura 3.10: Polarizzazione perpendicolare: geometria del problema.

3.3 Polarizzazione perpendicolare

Procedendo analogamente a quanto fatto per la polarizzazione parallela, si perviene al sistema

$$E_+^{(1)} + E_-^{(1)} = E_+^{(2)}\,, \tag{3.45}$$

$$\frac{E_+^{(1)}\cos\theta_1}{\zeta_1} - \frac{E_-^{(1)}\cos\theta_1}{\zeta_1} = \frac{E_+^{(2)}\cos\theta_2}{\zeta_2}\,, \tag{3.46}$$

da cui, risolvendo rispetto alle ampiezze dell'onda riflessa e trasmessa,

$$E_-^{(1)} = E_+^{(1)}\frac{\frac{\zeta_2}{\cos\theta_2} - \frac{\zeta_1}{\cos\theta_1}}{\frac{\zeta_2}{\cos\theta_2} + \frac{\zeta_1}{\cos\theta_1}}\,, \tag{3.47}$$

$$E_+^{(2)} = E_+^{(1)}\frac{2\frac{\zeta_2}{\cos\theta_2}}{\frac{\zeta_2}{\cos\theta_2} + \frac{\zeta_1}{\cos\theta_1}}\,. \tag{3.48}$$

Si definisce coefficiente di riflessione perpendicolare lo scalare

$$\Gamma_\perp = \frac{\vec{E}^r\cdot\hat{x}}{\vec{E}^i\cdot\hat{x}} = \frac{E_-^{(1)}}{E_+^{(1)}} = \frac{\zeta_2\cos\theta_1 - \zeta_1\cos\theta_2}{\zeta_2\cos\theta_1 + \zeta_1\cos\theta_2}\,, \tag{3.49}$$

mentre coefficiente di trasmissione perpendicolare la quantità

$$\tau_\perp = \frac{\vec{E}^t\cdot\hat{x}}{\vec{E}^i\cdot\hat{x}} = \frac{E_+^{(2)}}{E_+^{(1)}} = \frac{2\zeta_2\cos\theta_1}{\zeta_2\cos\theta_1 + \zeta_1\cos\theta_2} \tag{3.50}$$

Analogamente al caso di polarizzazione parallela vale la relazione $\tau_\perp = 1+\Gamma_\perp$ e per il riferimento assunto in Fig. 3.10 risulta

$$E_-^{(1)} = E_+^{(1)}\Gamma_\perp\,, \tag{3.51}$$

$$E_+^{(2)} = E_+^{(1)}\tau_\perp\,. \tag{3.52}$$

3.4 Angolo di Brewster

A questo punto ci poniamo la seguente domanda: esiste un particolare angolo di incidenza θ_1 per cui per il caso di polarizzazione parallela e/o per quello di polarizzazione perpendicolare non è presente onda riflessa? Per dare una risposta a tale quesito nel caso di polarizzazione parallela è necessario verificare se esiste un valore reale dell'angolo di incidenza θ_1 per cui

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\zeta_2 \cos\theta_2 - \zeta_1 \cos\theta_1}{\zeta_2 \cos\theta_2 + \zeta_1 \cos\theta_1} = 0\,, \tag{3.53}$$

che, poiché il denominatore risulta sempre limitato, equivale a verificare la relazione

$$\zeta_2 \cos\theta_2 - \zeta_1 \cos\theta_1 = 0\,. \tag{3.54}$$

I due angoli θ_1 e θ_2 sono legati dalla relazione

$$\sin\theta_2 = \frac{k_1}{k_2}\sin\theta_1\,, \tag{3.55}$$

quindi

$$\zeta_2^2(1-\sin^2\theta_2) = \zeta_1^2(1-\sin^2\theta_1)\,, \tag{3.56}$$

$$\zeta_2^2\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\sin^2\theta_1\right) = \zeta_1^2\left(1-\sin^2\theta_1\right)\,, \tag{3.57}$$

$$\sin^2\theta_1 = \frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{\zeta_2^2\frac{k_1^2}{k_2^2}-\zeta_1^2}\,, \tag{3.58}$$

da cui, ricordando che $\zeta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ e $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$, si ottiene

$$\sin^2\theta_1 = \left(\frac{\mu_2\epsilon_1-\mu_1\epsilon_2}{\epsilon_1^2-\epsilon_2^2}\right)\frac{\epsilon_2}{\mu_1}\,. \tag{3.59}$$

Nel caso in cui si consideri che entrambi i mezzi siano dielettrici, cioè $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$, si ha

$$\sin^2\theta_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} < 1\,. \tag{3.60}$$

Perciò, nel caso di polarizzazione parallela dell'onda incidente, esisterà sempre un angolo reale per cui non è presente onda riflessa nel mezzo di provenienza dell'onda. Essendo poi

$$\cos^2\theta_1 = 1-\sin^2\theta_1 = 1-\epsilon_2/(\epsilon_1+\epsilon_2) = \epsilon_1/(\epsilon_1+\epsilon_2) \tag{3.61}$$

tale angolo, detto *angolo di Brewster* θ_b, può essere definito attraverso la sua tangente

$$\tan\theta_b = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\,. \tag{3.62}$$

Per quanto riguarda invece la polarizzazione perpendicolare è necessario ricercare quel valore dell'angolo di incidenza θ_1 per cui risulta valida la condizione

$$\Gamma_\perp = \frac{\zeta_2\cos\theta_1 - \zeta_1\cos\theta_2}{\zeta_2\cos\theta_1 + \zeta_1\cos\theta_2} = 0\,, \tag{3.63}$$

ovvero

$$\zeta_2\cos\theta_1 - \zeta_1\cos\theta_2 = 0\,. \tag{3.64}$$

Procedendo analogamente al caso precedente si ottiene

$$\zeta_2^2(1-\sin^2\theta_1) = \zeta_1^2(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\sin^2\theta_1) \tag{3.65}$$

e quindi

$$\sin^2\theta_1 = \frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{\zeta_2^2-\zeta_1^2\frac{k_1^2}{k_2^2}} = \frac{\mu_2}{\epsilon_1}\,\frac{\mu_2\epsilon_1-\mu_1\epsilon_2}{\mu_2^2-\mu_1^2}\,. \tag{3.66}$$

Nel caso si consideri che entrambi i mezzi siano dielettrici $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$ per cui $(\mu_2-\mu_1) = \eta \to 0$ e quindi

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\eta+\mu_1}{\epsilon_1}\,\frac{\eta\epsilon_1+\mu_1(\epsilon_1-\epsilon_2)}{\eta(\eta+2\mu_1)} = \lim_{\eta\to 0}\frac{\mu_1}{2\epsilon_1}\,\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\eta} = \infty\,. \tag{3.67}$$

Per far si che il limite risulti finito ed inferiore all'unità dovrà essere $\epsilon_1-\epsilon_2 = 0$. Ciò equivale a richiedere che sia verificato il caso, banale, in cui i due mezzi dielettrici siano uguali.