Onde Piane

Con il termine *onda piana* si individua il più semplice tipo di propagazione in cui l'onda è funzione di una sola coordinata spaziale e della coordinata temporale. Sebbene, a rigore, le onde piane non esistono in alcuna situazione reale (in quanto dovrebbero essere generate da una sorgente di potenza infinita) alcune onde che si incontrano nella pratica possono essere considerate piane ed uniformi se osservate in zone sufficientemente ristrette dello spazio. Si parla in tal caso di onde *localmente piane*. Ad esempio il campo incidente su una antenna ricevente posta a grande distanza dall'antenna trasmittente può essere assimilato ad una onda piana. Lo studio della propagazione di una onda piana risulta inoltre importante in quanto è possibile rappresentare la soluzione di problemi elettromagnetici più complessi come opportuna sovrapposizione di infinite onde piane.

3.1 Onde Piane nel dominio del tempo

Si consideri una regione dello spazio in cui il mezzo sia lineare, omogeneo, stazionario, isotropo, non dispersivo sia nello spazio che nel tempo ($\vec{d}(\vec{r},t) = \varepsilon\vec{e}(\vec{r},t)$, $\vec{b}(\vec{r},t) = \mu\vec{h}(\vec{r},t)$), in cui non sia presente densità di corrente o di carica sostenuta dal campo elettromagnetico ($\vec{j}\,'(\vec{r},t) = \rho'(\vec{r},t) = 0$). Poiché il nostro interesse è rivolto allo studio della sola propagazione del campo elettromagnetico si considera la regione dello spazio priva di sorgenti ($\vec{j}_0(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r},t) = 0$). Si cerca cioè la soluzione omogenea del problema descritto dal sistema di equazioni differenziali di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{e}(\vec{r},t) = -\mu\frac{\partial\vec{h}(\vec{r},t)}{\partial t}\,, \tag{3.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}(\vec{r},t) = +\varepsilon\frac{\partial\vec{e}(\vec{r},t)}{\partial t}\,, \tag{3.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}(\vec{r},t) = 0\,, \tag{3.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h}(\vec{r},t) = 0\,. \tag{3.4}$$

Si introduca ora l'ipotesi fondamentale per cui il campo dipende da una sola coordinata spaziale e dalla coordinata temporale. Per semplicità di trattazione si supponga che tale coordinata spaziale sia la coordinata z di un sistema di coordinate cartesiane $\Sigma(x, y, z)$, cioè

$$\vec{e}(\vec{r}, t) = \vec{e}(z, t)\,, \qquad \vec{h}(\vec{r}, t) = \vec{h}(z, t)\,. \tag{3.5}$$

Esprimendo i campi attraverso le loro coordinate cartesiane e tenendo conto nell'operare il rotore della loro dipendenza dalla sola coordinata z, le prime due equazioni di Maxwell (3.1)–(3.2) risultano

$$-\frac{\partial e_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial e_x}{\partial z}\hat{y} = -\mu\frac{\partial h_x}{\partial t}\hat{x} - \mu\frac{\partial h_y}{\partial t}\hat{y} - \mu\frac{\partial h_z}{\partial t}\hat{z}\,, \tag{3.6}$$

$$-\frac{\partial h_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial h_x}{\partial z}\hat{y} = +\varepsilon\frac{\partial e_x}{\partial t}\hat{x} + \varepsilon\frac{\partial e_y}{\partial t}\hat{y} + \varepsilon\frac{\partial e_z}{\partial t}\hat{z}\,, \tag{3.7}$$

da cui proiettando ciascuna equazione sugli assi coordinati, si ottengono i seguenti due sistemi di equazioni differenziali di primo grado accoppiate

$$-\frac{\partial e_y}{\partial z} = -\mu\frac{\partial h_x}{\partial t}\,, \tag{3.8a}$$

$$+\frac{\partial e_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial h_y}{\partial t}\,, \tag{3.8b}$$

$$0 = -\mu\frac{\partial h_z}{\partial t}\,, \tag{3.8c}$$

$$-\frac{\partial h_y}{\partial z} = +\varepsilon\frac{\partial e_x}{\partial t}\,, \tag{3.9a}$$

$$+\frac{\partial h_x}{\partial z} = +\varepsilon\frac{\partial e_y}{\partial t}\,, \tag{3.9b}$$

$$0 = +\varepsilon\frac{\partial e_z}{\partial t}\,. \tag{3.9c}$$

Analizzando le eqn. (3.8c), (3.9c) è subito evidente che le componenti lungo z del campo sono indipendenti dalla coordinata temporale. Poiché siamo interessati allo studio dei soli campi dinamici ipotizzeremo che tali componenti statiche del campo siano nulle, cioè $e_z(z, t) = e_z(z) = 0$ e $h_z(z, t) = h_z(z) = 0$.

Derivando rispetto a z ambo i membri dell'eq. (3.8b) e facendo uso della eq. (3.9a) si perviene a una equazione di secondo grado nella sola componente e_x che prende il nome di *equazione d'onda*

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} = 0\,, \tag{3.10}$$

in cui $v^2 = 1/\varepsilon\mu$. Per sostituzione si verifica facilmente che la soluzione generale dell'equazione d'onda (3.10) è

$$e_x(z, t) = s_+(z - vt) + s_-(z + vt)\,, \tag{3.11}$$

dove s_+ e s_- sono funzioni arbitrarie purché differenziabili. Essendo il mezzo lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti ed è quindi possibile

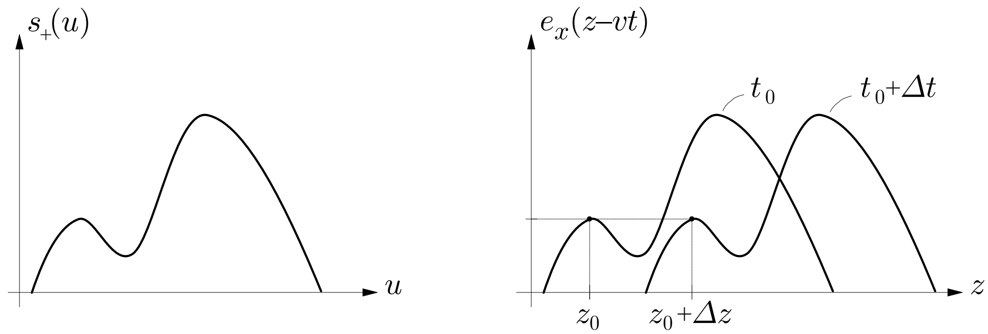

Figura 3.1: Funzione $s_+(u)$ e andamento spaziale della componente e_x dell'onda progressiva a diversi istanti temporali.

considerare la sola soluzione $s_+(u)$ indipendentemente dalla soluzione $s_-(u)$. Si analizzi ora il caso

$$e_x(z,t) = s_+(z - vt). \tag{3.12}$$

La funzione $s_+(z - vt)$ assume gli stessi valori per quelle coppie di punti $z = z_0$ e $z = z_0 + \Delta z$ e di tempi $t = t_0$ e $t = t_0 + \Delta t$ per le quali l'argomento della funzione sia identico, cioè per

$$z_0 - vt_0 = z_0 + \Delta z - v(t_0 + \Delta t)\,, \tag{3.13}$$

da cui, eliminando i termini comuni, risulta

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = v\,. \tag{3.14}$$

Quindi al variare del tempo t la forma d'onda $s_+(z - vt)$ trasla rigidamente senza deformarsi nel verso positivo dell'asse z con velocità[1] $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ (Fig. 3.1). Tale onda è comunemente detta *onda progressiva*.

Per quanto riguarda la funzione $s_-(z+vt)$ anch'essa rappresenta un'onda che trasla rigidamente ma nel verso negativo dell'asse z, in quanto ora $v = -\Delta z/\Delta t$. Tale onda è comunemente detta *onda regressiva*.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per le altre componenti del campo elettrico e magnetico ed in particolare per la componente h_y che soddisfa l'eq. (3.9a) che riportiamo qui sotto

$$\frac{\partial h_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial e_x}{\partial t}\,. \tag{3.15}$$

[1]Nel caso in cui il mezzo sia il vuoto $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2.997925057\,10^8\,[m/s] \simeq 3\,10^8\,[m/s] = c$, velocità della luce nel vuoto.

Introducendo la variabile $u = z \mp vt$, dove il segno meno è da riferirsi alla soluzione di onda progressiva mentre il segno positivo a quella di onda regressiva, la precedente equazione può essere scritta:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(h_y(u) \mp \frac{1}{\zeta} e_x(u)\right) = 0\,, \tag{3.16}$$

dove si è definita la costante $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ *impedenza intrinseca del mezzo*[2] e da cui risulta immediatamente

$$h_y(u) \mp \frac{1}{\zeta} e_x(u) = \text{cost}\,. \tag{3.17}$$

Essendo il campo elettromagnetico un fenomeno fisico si può sempre pensare che questo sia nullo al di fuori di un certo intervallo di tempo e di spazio per cui la costante che appare a secondo membro della eq. (3.17) può essere assunta nulla, quindi

$$\pm\zeta h_y(u) = e_x(u)\,. \tag{3.18}$$

Generalizzando il risultato anche alle altre componenti del campo, per l'onda *progressiva* risulta

$$\zeta\,\vec{h}(z - vt) = \hat{z} \times \vec{e}(z - vt)\,, \tag{3.19}$$

mentre per l'onda *regressiva*

$$\zeta\,\vec{h}(z + vt) = -\hat{z} \times \vec{e}(z + vt)\,. \tag{3.20}$$

Si consideri adesso un nuovo sistema di riferimento $\Sigma'(x', y', z')$ avente lo stesso origine del sistema di riferimento $\Sigma(x, y, z)$ utilizzato nella precedente trattazione e si indichi con $\hat{k} = \hat{z}$ la direzione di propagazione dell'onda piana, coincidente con l'asse z del precedente sistema di riferimento. Un generico punto P dello spazio, descritto nel nuovo sistema di riferimento dal vettore $\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$, individua un piano perpendicolare alla direzione di propagazione la cui distanza dall'origine risulta (Fig. 3.2)

$$z_0 = \vec{r}' \cdot \hat{k}\,. \tag{3.21}$$

Il campo elettromagnetico associato all'onda progressiva è quindi esprimibile

[2]Nel caso in cui il mezzo sia il vuoto $\zeta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \simeq 120\pi\,[\Omega] \simeq 377\,[\Omega] = \zeta_0$, impedenza intrinseca del vuoto.

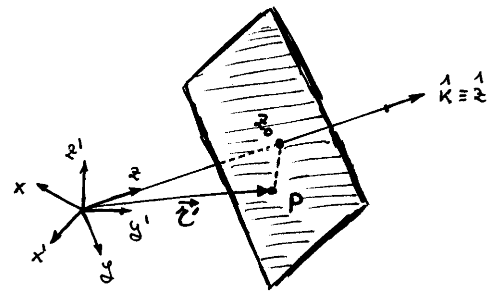

Figura 3.2: Piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

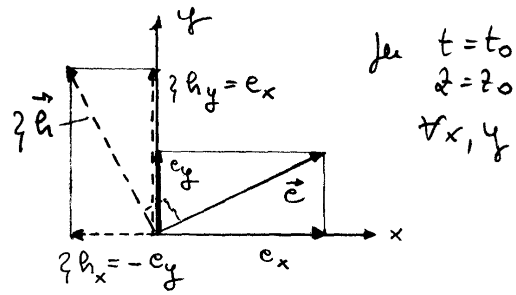

Figura 3.3: Disposizione del campo elettrico e magnetico nel generico piano $\hat{k} \cdot \vec{r} = z_0$ all'istante $t = t_0$.

come

$$\vec{e}(\vec{r}', t) = s_+(\vec{r}' \cdot \hat{k} - vt)\,, \tag{3.22}$$

$$\vec{h}(\vec{r}', t) = \frac{1}{\zeta}\hat{k} \times \vec{e}(\vec{r}' \cdot \hat{k} - vt)\,. \tag{3.23}$$

Per l'onda regressiva sarà sufficiente considerare come direzione di propagazione $\hat{k} = -\hat{z}$.

Se ora si limita la nostra analisi alla sola onda progressiva per ogni punto P appartenente al piano $\hat{k} \cdot \vec{r} = z_0 =$ cost, perpendicolare alla direzione di propagazione, si ha, per il generico istante $t = t_0$, la situazione schematizzata in Fig. 3.3. Si può notare che in un mezzo lineare, omogeneo, isotropo e non dispersivo, le componenti del campo elettrico e magnetico dell'onda piana risultano perpendicolari tra loro e perpendicolari alla direzione di propagazione. Inoltre le loro ampiezze sono uniformi su ogni piano perpendicolare alla direzione di propagazione (di qui l'origine del termine onda piana) e sono legate da una relazione di proporzionalità.

3.2 Onde Piane nel dominio della frequenza

Si vuole ora valutare la soluzione di onda piana in un mezzo lineare, omogeneo, stazionario, isotropo, non dispersivo nello spazio ma dispersivo nel tempo in cui le relazioni costitutive che legano i campi ai vettori induzione assumono la forma

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t-t')\,\vec{e}(\vec{r},t')\,dt'\,, \tag{3.24}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(t-t')\,\vec{h}(\vec{r},t')\,dt'\,. \tag{3.25}$$

Poiché nel dominio della frequenza tali relazioni costitutive si riducono a delle semplici relazioni di proporzionalità

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\,\vec{E}(\vec{r},\omega)\,, \tag{3.26}$$

$$\vec{B}(\vec{r},\omega) = \mu(\omega)\,\vec{H}(\vec{r},\omega)\,, \tag{3.27}$$

è conveniente cercare in tale dominio la soluzione delle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},\omega) = -j\omega\mu\vec{H}(\vec{r},\omega)\,, \tag{3.28}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r},\omega) = +j\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r},\omega)\,, \tag{3.29}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega) = 0\,, \tag{3.30}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H}(\vec{r},\omega) = 0\,. \tag{3.31}$$

Operando quindi il rotore della eq. (3.28) e facendo uso della eq. (3.29) si ottiene

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{\nabla}\times\vec{H} = \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} \tag{3.32}$$

da cui, utilizzando la definizione di laplaciano vettoriale ($\nabla^2\vec{a} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{a} - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{a}$) e l'eq. (3.30), si perviene all'equazione omogenea di Helmholtz

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} = 0\,. \tag{3.33}$$

Considerando poi un sistema di riferimento cartesiano il laplaciano vettoriale può essere scritto come somma dei laplaciani delle singole componenti, cioè

$$\nabla^2\vec{E} = \nabla^2 E_x\hat{x} + \nabla^2 E_y\hat{y} + \nabla^2 E_z\hat{z}\,, \tag{3.34}$$

per cui, eguagliando le singole componenti, l'eq (3.33) assume la forma

$$\nabla^2 E_i + \omega^2 \varepsilon\mu E_i = 0\,, \qquad i = x, y, z\,. \tag{3.35}$$

Il problema si riduce quindi a risolvere tre equazioni differenziali scalari formalmente uguali.

Imponendo che i campi dipendano dalla sola componente spaziale z, cioè $E_i(\vec{r},\omega) = E_i(z,\omega)$, ciascuna equazione scalare si riduce a

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_i(z,\omega) + k^2 E_i(z,\omega) = 0\,, \qquad i = x, y, z\,, \tag{3.36}$$

dove $k^2 = \omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$ è detta *costante di propagazione*. L'eq. (3.36) è una equazione differenziale di secondo grado, omogenea, a cofficienti costanti la cui soluzione generale ha la forma

$$E_i(z,\omega) = E_{i+}(\omega)\exp(-jk^+z) + E_{i-}(\omega)\exp(-jk^-z)\,. \tag{3.37}$$

$E_{i+}(\omega)$, $E_{i-}(\omega)$ sono costanti complesse il cui valore è determinato in base alle condizioni al contorno mentre le radici k^+ e k^- risultano rispettivamente $k^+ = +\sqrt{k^2}$ e $k^- = -\sqrt{k^2}$. Poiché in generale per tenere conto delle perdite per isteresi la permittività $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ e la permeabilità $\mu = \mu_1 - j\mu_2$ sono quantità complesse con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^+$ le due radici risultano anch'esse complesse e della forma

$$k^+ = \beta - j\alpha\,, \qquad k^- = -\beta + j\alpha\,. \tag{3.38}$$

dove $\beta(\omega) \in \mathbb{R}^+$ è detta *costante di fase* e $\alpha(\omega) \in \mathbb{R}^+$ *costante di attenuazione*; quest'ultima è da considerarsi nulla nel caso in cui non siano presenti perdite ($\varepsilon_2 = \mu_2 = 0$).

Al fine di dare una qualche interpretazione all'eq. (3.37) si consideri dapprima il caso in cui al secondo membro sia presente solo il primo termine, cioè il caso in cui $E_{i+}(\omega) = |E_{i+}(\omega)|\exp(j\phi_{i+}(\omega)) \neq 0$ e $E_{i-}(\omega) = 0$, per poi estenderne immediatamente il risultato al secondo termine che presenta la stessa forma. In tale ipotesi la generica i–esima componente del campo elettrico risulta

$$E_i(z,\omega) = |E_{i+}|\exp(j\phi_{i+})\exp(-j\beta z)\exp(-\alpha z)\,. \tag{3.39}$$

Supponendo per semplicità che il segnale sia monocromatico[3] l'espressione del campo nel dominio del tempo risulta

$$e_i(z,t) = |E_{i+}|\exp(-\alpha z)\cos(\omega t - \beta z + \phi_{i+})\,. \tag{3.40}$$

[3]Segnali più complessi origineranno comunque un campo elettrico combinazione lineare di funzioni cosinusoidali del tipo (3.40).

L'argomento del coseno $\varphi(z,t) = \omega t - \beta z + \phi_{i+}$ è detto *fase del campo* $e_i(z,t)$ e la superficie su cui la fase del campo risulta costante è un piano ortogonale all'asse z che prende nome di *piano equifase.* Si consideri ora tale fase nel punto $z = z_0$ all'istante $t = t_0$ e successivamente nel punto $z = z_0 + \Delta z$ all'istante $t = t_0 + \Delta t$. Si definisce variazione di fase $\Delta\varphi$ la quantità

$$\Delta\varphi = \varphi(z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t) - \varphi(z_0, t_0) = \omega\Delta t - \beta\Delta z\,. \tag{3.41}$$

Tale variazione di fase risulta nulla ($\Delta\varphi = 0$) quando

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} = v_f\,. \tag{3.42}$$

Se Δz e Δt sono considerati incrementi infinitesimi il loro rapporto rappresenta la velocità a cui un osservatore deve muoversi per vedere sempre lo stesso valore della fase; per tale motivo la quantità v_f prende il nome di *velocità di fase.* Quindi al variare del tempo il piano equifase si sposta nella direzione delle z positive con velocità $v_f = \omega/\beta$. La distanza tra due piani di fase la cui differenza di fase è pari a 2π è chiamata *lunghezza d'onda* λ ed è facilmente dimostrabile che risulta pari a $\lambda = 2\pi/\beta$. Esaminando l'eq. (3.40) è poi evidente che nel caso in cui siano presenti perdite, $\alpha \geq 0$, l'ampiezza del campo varia esponenzialmente su ogni piano $z =$ cost, detto *piano equiampiezza.* Nel caso esaminato i piani equifase e quelli equiampiezza coincidono ma ciò, come varrà evidenziato in seguito, non è verificato in generale.

Il primo termine a secondo membro dell'eq. (3.37) rappresenta quella che viene chiamata *onda progressiva* cioè un'onda i cui piani di fase si spostano con velocità v_f nella direzione delle z positive. Analogamente il secondo termine rappresenta invece la cosiddetta *onda regressiva* i cui piani di fase si spostano con velocità v_f nella direzione opposta alla precedente, cioè delle z negative.

La soluzione (3.39) può essere generalizzata considerando una arbitraria direzione $\hat{k}$ dello spazio tramite la relazione

$$\vec{E}(z,\omega) = \vec{E}_+(\omega)\exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r})\,, \tag{3.43}$$

in cui si è definito *vettore d'onda* il vettore $\vec{k} = k\,\hat{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$. Poiché si era posto $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$ il vettore d'onda deve soddisfare la condizione

$$k^2 = \vec{k}\cdot\vec{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\varepsilon\mu\,, \tag{3.44}$$

detta *condizione di separabilità.* Inoltre, poiché

$$\vec{\nabla}\exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r}) = -j\vec{k}\,\exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r})\,, \tag{3.45}$$

il rotore del campo elettrico associato a un'onda piana può essere scritto come

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},\omega) &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_+(\omega)\, \exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r})\right) = \\ &= \exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r})\, \vec{\nabla} \times \vec{E}_+(\omega) + \vec{\nabla} \exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r}) \times \vec{E}_+(\omega) = -j\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r},\omega)\,.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Per quanto riguarda il campo magnetico operando il rotore della eq. (3.29) e facendo uso della eq. (3.28) è possibile pervenire a risultati analoghi a quelli derivati per il campo elettrico ed in particolare $\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r},\omega) = -j\vec{k} \times \vec{H}(\vec{r},\omega)$.

Per un'onda piana è quindi possibile scrivere le eqn. (3.28)–(3.29) nella forma

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\vec{B}\,, \tag{3.47}$$

$$\vec{H} \times \vec{k} = \omega\vec{D}\,. \tag{3.48}$$

Facendo poi uso delle relazioni costituitive (3.26)–(3.27) le eqn. (3.47)–(3.48) risultano

$$\omega\mu\vec{H} = \vec{k} \times \vec{E}\,, \tag{3.49}$$

$$\omega\varepsilon\vec{E} = \vec{H} \times \vec{k}\,, \tag{3.50}$$

ovvero, definendo $\zeta = \omega\mu/k = \sqrt{\mu(\omega)/\varepsilon(\omega)}$ *impedenza caratteristica del mezzo*,

$$\zeta\vec{H} = \hat{k} \times \vec{E}\,, \tag{3.51}$$

$$\vec{E}/\zeta = \vec{H} \times \hat{k}\,. \tag{3.52}$$

Moltiplicando inoltre scalarmente per $\hat{k}$ ambo i membri delle eqn. (3.47)–(3.48) si ottiene

$$\hat{k} \cdot \omega\vec{B} = \hat{k} \cdot \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \vec{E} \cdot \left(\hat{k} \times \vec{k}\right) = 0\,, \tag{3.53}$$

$$\hat{k} \cdot \omega\vec{D} = \hat{k} \cdot \left(\vec{H} \times \vec{k}\right) = \vec{H} \cdot \left(\vec{k} \times \hat{k}\right) = 0\,. \tag{3.54}$$

da cui, facendo nuovamente uso delle relazioni costituitive (3.26)–(3.27),

$$\hat{k} \cdot \vec{E} = 0\,, \qquad \hat{k} \cdot \vec{H} = 0\,. \tag{3.55}$$

Si supponga ora che la direzione di propagazione $\hat{k}$ dell'onda piana sia reale, in tal caso l'onda piana è chiamata *onda omogenea* e sia i vettori induzione che i campi risultano spazialmente ortogonali a tale direzione $\hat{k}$. Un'onda piana omogenea che si propaga in un mezzo lineare, isotropo, omogeneo, stazionario, non dispersivo nello spazio è un'onda *trasversa elettromagnetica* in quanto sia il campo elettrico che quello magnetico giacciono nel piano ortogonale alla direzione di propagazione.

Precedentemente avevamo ipotizzato che la direzione di propagazione fosse reale. Tale ipotesi tuttavia limita la soluzione più generale di onda piana. Si consideri adesso che l'onda piana si propaghi in un mezzo privo di perdite ($k = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} = \beta \in \mathbb{R}^+$) con una direzione di propagazione complessa

$$\hat{k} = p\,\hat{\imath}_p - j\,q\,\hat{\imath}_q \qquad \text{con } p, q \in \mathbb{R} \tag{3.56}$$

che soddisfa la condizione di separabilità

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = k^2\left(p^2 - q^2 - 2j\,p\,q\,\hat{\imath}_p\cdot\hat{\imath}_q\right) = \omega^2\varepsilon_1\mu_1\,. \tag{3.57}$$

Ciò equivale a richiedere

$$p^2 - q^2 = 1\,, \tag{3.58}$$

$$2\,j\,p\,q\,\hat{\imath}_p\cdot\hat{\imath}_q = 0\,, \tag{3.59}$$

ovvero $p \geq 1$ e $\hat{\imath}_p \perp \hat{\imath}_q$. Anche in questo caso

$$\zeta\vec{H} = \hat{k}\times\vec{E}\,, \qquad \vec{E}/\zeta = \vec{H}\times\hat{k} \tag{3.60}$$

e

$$\hat{k}\cdot\vec{E} = 0\,, \qquad \hat{k}\cdot\vec{H} = 0\,, \tag{3.61}$$

tuttavia essendo $\hat{k} \in \mathbb{C}$ non è possibile assumere che il campo elettrico e/o quello magnetico siano spazialmente ortogonali alla direzione di propagazione, cioè il campo non risulta più trasverso elettromagnetico. Tale tipo di onda piana è comunemente detta *non omogenea*.

Si consideri per semplicità il caso di un'onda piana non omogenea polarizzata linearmente, cioè $\vec{E}_+(\omega) = |\vec{E}_+|\exp(j\phi_+)\hat{\imath}_e$. In tale ipotesi la forma generale del campo elettrico è

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},\omega) &= \vec{E}_+(\omega)\exp(-j\beta\hat{k}\cdot\vec{r}) = \\ &= |\vec{E}_+|\exp(j\phi_+)\exp(-j\beta p\hat{\imath}_p\cdot\vec{r})\exp(-\beta q\hat{\imath}_q\cdot\vec{r})\hat{\imath}_e\,,\end{aligned} \tag{3.62}$$

per cui, supponendo l'onda monocromatica, l'espressione del campo elettrico nel dominio del tempo risulta:

$$\vec{e}(\vec{r},\omega) = |\vec{E}_+|\exp(-\beta q\hat{\imath}_q\cdot\vec{r})\,\cos(\omega t - \beta p\hat{\imath}_p\cdot\vec{r} + \phi_+)\,\hat{\imath}_e\,. \tag{3.63}$$

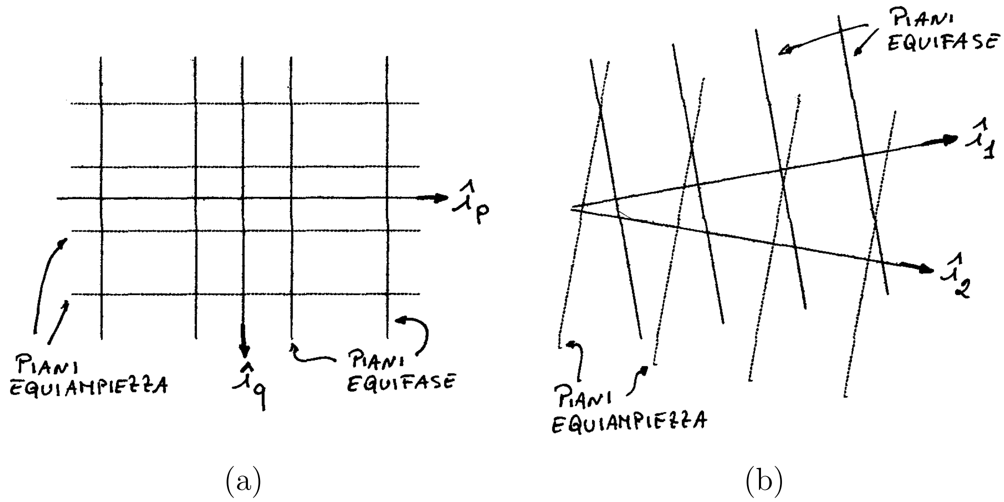

Figura 3.4: Piani equifase e piani equiampiezza per un'onda non omogenea che si propaga in un mezzo: (a) privo di perdite; (b) con perdite.

Dalla eq. (3.63) è evidente che, per un determinato tempo $t = t_0$, la superficie a fase costante sarà la superficie su cui $\hat{\imath}_p \cdot \vec{r} = \text{cost}$, cioè un piano perpendicolare alla direzione $\hat{\imath}_p$. Tale superficie traslerà in direzione $\hat{\imath}_p$ con velocità

$$v_f = \frac{\omega}{\beta p} \leq \frac{\omega}{\beta} \tag{3.64}$$

che, essendo $p \geq 1$, risulta minore della velocità di fase ω/β di un'onda piana omogenea che si propaga nello stesso mezzo. Per tale motivo tali tipi di onde vengono anche chiamate *onde lente*.

Per quanto riguarda l'ampiezza del campo elettrico $|\vec{E}_+| \exp(-\beta q \hat{\imath}_q \cdot \vec{r})$ questa risulta costante su superfici di equazione $\hat{\imath}_q \cdot \vec{r} = \text{cost}$, ovvero su piani equiampiezza ortogonali alla direzione $\hat{\imath}_q$, mentre, anche se non sono presenti perdite nel mezzo, varia esponenzialmente lungo $\hat{\imath}_q$. Si noti inoltre che la condizione di separabilita impone che $\hat{\imath}_p \cdot \hat{\imath}_q = 0$ per cui nel caso di un'onda non omogenea che si propaghi in un mezzo privo di perdite i piani equifase risultano ortogonali ai piani equiampiezza (Fig. 3.4a).

Nel caso in cui nel mezzo siano invece presenti perdite ($k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega\sqrt{(\varepsilon_1 - j\varepsilon_2)(\mu_1 - j\varepsilon_2)} = \beta - j\alpha \in \mathbb{C}$) l'espressione del campo elettrico associato all'onda piana non omogenea risulta

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \vec{E}_+ \exp\left[-j(\beta - j\alpha)\hat{k}\cdot\vec{r}\right] = \\ = |\vec{E}_+|\exp(j\phi_+)\exp\left[-j(\beta p\hat{\imath}_p - \alpha q\hat{\imath}_q)\cdot\vec{r}\right]\exp\left[-(\alpha p\hat{\imath}_p - \beta q\hat{\imath}_q)\cdot\vec{r}\right]\hat{\imath}_e\,. \tag{3.65}$$

Definendo

$$k_1\hat{\imath}_1 = \beta\,p\,\hat{\imath}_p - \alpha\,q\,\hat{\imath}_q\,, \qquad k_2\hat{\imath}_2 = \alpha\,p\,\hat{\imath}_p - \beta\,q\,\hat{\imath}_q\,, \tag{3.66}$$

che per la condizione di separabilità devono soddisfare le relazioni

$$k_1^2 - k_2^2 = \beta^2 - \alpha^2\,, \qquad k_1k_2\hat{\imath}_1\cdot\hat{\imath}_2 = \beta\alpha\,, \tag{3.67}$$

l'espressione del campo elettrico può essere scritta nella forma

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = |\vec{E}_+|\exp(j\phi_+)\exp(-jk_1\hat{\imath}_1\cdot\vec{r})\exp(-k_2\hat{\imath}_2\cdot\vec{r})\hat{\imath}_e\,. \tag{3.68}$$

Confrontando quest'ultima con l'eq. (3.62) è subito evidente che nel caso di mezzo con perdite sono ancora presenti i piani equifase e i piani equiampiezza, i primi ortogonali alla direzione $\hat{\imath}_1$ mentre i secondi alla direzione $\hat{\imath}_2$, ma che questi non risultano più ortogonali tra di loro (Fig. 3.4b).