Campi elettromagnetici dinamici

2.1 Le equazioni di Maxwell.

La teoria di James Clerk Maxwell (1831–1879), che Hertz identifica con "il sistema di equazioni di Maxwell", descrive ogni fenomeno elettromagnetico in ambito macroscopico attraverso un insieme di equazioni differenziali la cui validità è data come postulato. Un gran numero di esperienze permettono di asserire che i fenomeni macroscopici di origine elettromagnetica sono correttamente descritti da tale sistema di equazioni, sistema che completa le ricerche di Ampere sulla interferenza tra elementi di corrente e le osservazioni di Faraday sui campi variabili.

Prima di introdurre il sistema di equazioni differenziali è necessario definire il campo elettromagnetico come il dominio dei vettori $\vec{e}(\vec{r}, t)$, $\vec{h}(\vec{r}, t)$, $\vec{d}(\vec{r}, t)$, $\vec{b}(\vec{r}, t)$. Tali vettori sono considerati aventi ampiezza limitata ovunque e continui, insieme con le loro derivate [1], rispetto alla variabile spaziale $\vec{r}$ e temporale t . I vettori $\vec{e}(\vec{r}, t)$ e $\vec{h}(\vec{r}, t)$ vengono rispettivamente denominati intensità di campo elettrico $[V/m]$ ed intensità di campo magnetico $[A/m]$, mentre i vettori $\vec{d}(\vec{r}, t)$ e $\vec{b}(\vec{r}, t)$ vettore induzione elettrica $[C/m^2]$ e vettore induzione magnetica $[Wb/m^2]$. Essendo tali vettori di campo definiti attraverso gli stessi esperimenti che li caratterizzano non è possibile individuarne uno più fondamentale dell'altro.

Le sorgenti del campo elettromagnetico risultano essere distribuzioni di carica $\rho(\vec{r}, t)$ [C/m^3] e di corrente elettrica $\vec{j}(\vec{r}, t)$ [A/m^2]. In particolare esse sono definite come:

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{carica\ contenuta\ nel\ volume\ \Delta V}{\Delta V} \ , \tag{2.1}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{corrente\ fluente\ attraverso\ la\ superficie\ \Delta S}{\Delta S} \ , \tag{2.2}$$

[1] Discontinuità dei campi o delle loro derivate si possono tuttavia avere su superfici che separano porzioni dello spazio aventi differenti caratteristiche elettromagnetiche.

accettando che tali grandezze abbiano un andamento continuo quando il volume ΔV o la superficie ΔS si riduce a zero. Tuttavia, data la caratteristica granulare della distribuzione di carica e della corrente elettrica (a rigore si dovrebbe avere una visione quantistica del problema) non è possibile considerare volumi o superfici troppo piccoli in cui l'asserto precedente risulta non più valido. Questo pone un limite sulla massima frequenza entro la quale le equazioni di Maxwell descrivono correttamente il fenomeno elettromagnetico, frequenza che corrisponde circa a quella del primo ultravioletto ($\lambda \simeq 0.1 \mu m$).

Enunciamo ora le equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{e}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{b}(\vec{r}, t)}{\partial t} \ , \tag{2.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{d}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{j}(\vec{r}, t) \ , \tag{2.4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{d}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \ , \tag{2.5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b}(\vec{r}, t) = 0 \ , \tag{2.6}$$

dove $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r}, t) + \vec{j}'(\vec{r}, t)$ e con $\vec{j}'(\vec{r}, t)$ si è indicata la densità di corrente elettrica sostenuta dal campo elettromagnetico mentre con $\vec{j}_0(\vec{r}, t)$ la densità di corrente impressa dai generatori. Analogamente per la densita' di carica per unita' di volume $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}, t) + \rho'(\vec{r}, t)$. Tali equazioni differenziali costituiscono un sistema di due equazioni vettoriali (2.3)–(2.4) e due equazioni scalari (2.5)–(2.6) le quali complessivamente corrispondono all'insieme di otto equazioni scalari. E' tuttavia immediato verificare che le equazioni non sono tutte indipendenti. Infatti, operando la divergenza della equazione (2.3) e ricordando che la divergenza di un rotore è identicamente nulla, si otterrà:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{e}(\vec{r}, t) \right] = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{b}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \ . \tag{2.7}$$

Avendo poi supposto i campi e le loro derivate continui è possibile scambiare l'ordine dell'operatore divergenza con di quello derivata temporale, da cui:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{b}(\vec{r}, t) = 0 \ . \tag{2.8}$$

Tale relazione sarà verificata qualora $\vec{\nabla} \cdot \vec{b}(\vec{r}, t) = cost$. Si può ora supporre l'esistenza di un particolare tempo remoto $t = -\infty$ in cui i campi erano identicamente nulli, ipotesi che ci permette di scrivere $\vec{\nabla} \cdot \vec{b}(\vec{r}, t) = 0$ così come enunciato dall'equazione (2.6). Si delinea così un sistema complessivo di sette equazioni linearmente indipendenti nelle incognite $\vec{e}$, $\vec{h}$, $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{j}'$, ρ'

per un totale di sedici incognite. Per risolvere il problema elettromagnetico sarà quindi necessario, oltre a fornire le condizioni al contorno e le condizioni iniziali, considerare delle ulteriori relazioni che legano tra loro i vettori del campo elettromagnetico. Tali relazioni, che verranno in seguito analizzate in dettaglio, prendono generalmente il nome di relazioni costitutive od equazioni di legame e tengono conto delle caratteristiche elettromagnetiche del mezzo in cui il campo si propaga. Per il vuoto esse assumono la forma più semplice:

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\, \vec{e}(\vec{r},t)\ , \tag{2.9}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \mu_0\, \vec{h}(\vec{r},t)\ , \tag{2.10}$$

$$\vec{j}'(\vec{r},t) = 0\ , \tag{2.11}$$

dove con $\varepsilon_0 = 8.854185\, 10^{-12}$ [F/m] si è indicata la costante dielettrica o permettività del vuoto e con $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ [H/m] si è indicata la permeabilità magnetica del vuoto.

La connessione fra i fenomeni elettromagnetici e quelli meccanici è data da una ulteriore equazione detta equazione di Lorentz:

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\left(\vec{e}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{b}(\vec{r},t)\right)\ , \tag{2.12}$$

dove $\vec{f}(\vec{r},t)$ è la forza per unità di volume [N/m^3] che agisce sulla densità di carica $\rho(\vec{r},t)$ e $\vec{v}(\vec{r},t)$ la velocità della suddetta densità di carica [2].

Dal sistema di equazioni (2.3)–(2.6) si può poi derivare quella che, per analogia con un teorema idrodinamico, prende nome di equazione di continuità della corrente. Infatti operando la divergenza dell'eq. (2.4) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{d}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0\ , \tag{2.13}$$

da cui, sostituendo l'eq. (2.5), si ricava:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0\ . \tag{2.14}$$

Integrando quest'ultima equazione (equazione di continuità della corrente) su un volume V racchiuso da una superficie S ed utilizzando il teorema di Gauss si ha:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)\, dV = \oint_S \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\hat{n}\, dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\vec{r},t)\, dV\ , \tag{2.15}$$

[2] Si noti come $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$.

da cui, definendo $i(t)$ la corrente complessiva fluente attraverso la superficie S e con $q(t)$ la carica totale contenuta nel volume V, si ottiene:

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} \; . \tag{2.16}$$

L'equazione (2.16) rappresenta la generalizzazione della prima legge di Kirchhoff per correnti e cariche variabili nel tempo. In particolare si ha che alla variazione di corrente $i(t)$ nell'intervallo di tempo dt (cioè $i(t)\,dt$) attraverso la superficie chiusa S deve corrispondere una diminuzione di carica $-dq(t)$ all'interno del volume V.

Per analizzare il significato fisico delle equazioni di Maxwell e per ritrovare attraverso di esse le leggi dell'elettromagnetismo classico è necessario esprimere tali equazioni in forma integrale. In particolare, integrando in un volume V limitato da una superficie chiusa S di normale esterna $\hat{n}$ le equazioni (2.5) e (2.6) e facendo uso del teorema di Gauss per passare da un integrale di volume a uno di superficie, si ottiene:

$$\Phi_e(t) \equiv \oint_S \vec{d}(\vec{r},t)\cdot\hat{n}\,dS = \int_V \rho(\vec{r},t)\,dV = q \; , \tag{2.17}$$

$$\Phi_m(t) \equiv \oint_S \vec{b}(\vec{r},t)\cdot\hat{n}\,dS = 0 \; . \tag{2.18}$$

Le equazioni (2.17) e (2.18) non sono altro che la legge di Gauss rispettivamente per cariche elettriche e magnetiche. La prima esprime l'uguaglianza fra il flusso dell'induzione elettrica attraverso una superficie S chiusa e la carica q contenuta all'interno della superficie stessa. La seconda afferma che il flusso del vettore induzione magnetica attraverso una qualsiasi superficie chiusa risulta sempre nullo; ciò esprime il fatto che in natura ancora non è stata trovata carica magnetica libera.

Integrando invece le equazioni (2.3) e (2.4) su una superficie S aperta di normale $\hat{n}$, limitata da un contorno C di versore tangente $\hat{i}_c$, ed utilizzando il teorema di Stokes per passare da un integrale di superficie ad una circuitazione, si ottiene:

$$\oint_C \vec{e}(\vec{r},t)\cdot\hat{i}_c\,d\ell = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{b}(\vec{r},t)\cdot\hat{n}\,dS = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_m(t) \; , \tag{2.19}$$

$$\oint_C \vec{h}(\vec{r},t)\cdot\hat{i}_c\,d\ell = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{d}(\vec{r},t)\cdot\hat{n}\,dS + \int_S \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\hat{n}\,dS = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_e(t) + i(t) \; . \tag{2.20}$$

L'eq. (2.19) non è altro che la legge di Neumann–Lenz ed esprime l'uguaglianza tra la variazione temporale del flusso del vettore induzione magnetica concatenato con un circuito e la forza elettromotrice indotta nel circuito

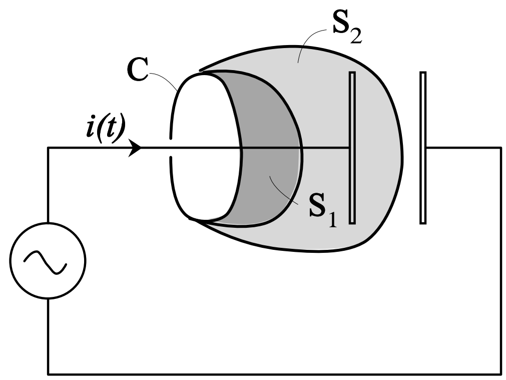

Figura 2.1: *Un esempio che evidenzia la inapplicabilità della legge di Ampère al caso di campi dinamici.*

stesso dalla variazione temporale del flusso. L'eq. (2.20) è invece l'estensione della legge di Ampère. Maxwell si era infatti accorto della incongruenza matematica tra la legge di Ampère e l'equazione di continuità della corrente. Tale incongruenza è ancor più evidente se si pensa ad esempio al circuito di Fig. 2.1 in cui è presente un conduttore metallico su cui scorre una corrente $i(t)$ variabile nel tempo ed i cui estremi sono connessi ad un condensatore in aria a piatti paralleli. Applicando la legge di Ampère si arriverebbe all'assurdo che, scorrendo nel conduttore una corrente $i(t) \neq 0$, il flusso di corrente attraverso la superficie S_1 di contorno C risulterebbe non nullo ($\oint \vec{h} \cdot \hat{i}_c \, d\ell = \int_{S_1} \vec{j} \cdot \hat{n} \, S = i(t)$) mentre quello attraverso la superficie S_2 avente stesso contorno C risulterebbe pari a zero in quanto la superficie S_2 non è attraversata dal conduttore ($\oint \vec{h} \cdot \hat{i}_c \, d\ell = \int_{S_2} \vec{j} \cdot \hat{n} \, S = 0$). Considerando l'estensione di Maxwell è invece presente l'ulteriore termine

$$\int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{d}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_e(t) = i_s(t) \tag{2.21}$$

che Maxwell chiama corrente di spostamento $i_s(t)$. Il valore della corrente di spostamento che fluisce attraverso le piastre del condensatore è esattamente uguale al valore della corrente di conduzione che scorre nel conduttore rendendo così univoco il valore della circuitazione del campo magnetico e rimuovendo l'incongruenza.

Le equazioni di Maxwell in forma integrale risultano utili in presenza di discontinuità delle caratteristiche fisiche dei mezzi in cui non è più assicurata la continuità locale dei campi e le equazioni in forma differenziale non sono applicabili.

A volte è conveniente rendere simmetriche le equazioni di Maxwell sia nella forma differenziale che integrale introducendo una densità di carica magnetica ρ_m [Wb/m^3] e una densità di corrente magnetica $\vec{j}_m$ [V/m^2] fittizie:

$$\vec{\nabla} \times \vec{e}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{b}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \vec{j}_m(\vec{r}, t) \ , \tag{2.22}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{d}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{j}(\vec{r}, t) \ , \tag{2.23}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{d}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \ , \tag{2.24}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b}(\vec{r}, t) = \rho_m(\vec{r}, t) \tag{2.25}$$

ed un'equazione di continuità della corrente magnetica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho_m(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \ . \tag{2.26}$$

L'introduzione di tali quantità risulta utile in quanto alcune configurazioni di campo sono equivalentemente rappresentate da quelle prodotte da sorgenti magnetiche (ad esempio il campo radiato a grande distanza da una spira elementare percorsa da corrente elettrica è equivalente a quello radiato da una corrente magnetica elementare) e risultano essenziali nell'enunciazione del teorema di equivalenza.

Introducendo la trasformata di Fourier è possibile esprimere grandezze istantanee reali come sovrapposizione di grandezze di tipo sinusoidale. Può perciò risultare conveniente risolvere il problema elettromagnetico nel dominio trasformato, per poi valutare i campi nel dominio del tempo operando una trasformata inversa di Fourier. Ad esempio per il campo elettrico si ha:

$$\vec{e}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \exp(j\omega t) \, d\omega \ . \tag{2.27}$$

Formule analoghe valgono per gli altri vettori del campo. Le equazioni di Maxwell nel dominio trasformato della pulsazione ω (generalmente chiamato *dominio della frequenza*) si ottengono trasformando ambo i membri delle (2.22)–(2.25):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}, \omega) - \vec{J}_m(\vec{r}, \omega) \ , \tag{2.28}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = +j\omega \vec{D}(\vec{r}, \omega) + \vec{J}(\vec{r}, \omega) \ , \tag{2.29}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, \omega) = \rho(\vec{r}, \omega) \ , \tag{2.30}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \rho_m(\vec{r}, \omega) \ . \tag{2.31}$$

Nello stesso dominio le equazioni di continuità della corrente elettrica, eq. (2.14), e di quella magnetica eq. (2.26), diventano, rispettivamente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, \omega) + j\omega\rho(\vec{r}, \omega) = 0 \ , \tag{2.32}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m(\vec{r}, \omega) + j\omega\rho_m(\vec{r}, \omega) = 0 \ . \tag{2.33}$$

Importante è il caso dei segnali puramente sinusoidali nel tempo (segnali armonici) rappresentati dal loro fasore complesso in cui per esprimere i campi nel dominio del tempo è sufficiente moltiplicare il fasore per $\exp(j\omega t)$ e prenderne la parte reale.

2.2 Relazioni costitutive

Come già visto nel paragrafo precedente per risolvere il problema elettromagnetico è necessario introdurre delle relazioni che legano i vettori induzione ai campi e prendono il nome di *relazioni costitutive* od *equazioni di legame*. In generale ciascun vettore induzione è legato sia al campo elettrico che a quello magnetico (mezzi bi–anisotropi), tuttavia nella quasi totalità delle applicazioni il vettore induzione elettrica è funzione del solo campo elettrico così come il vettore induzione magnetica del solo campo magnetico. In tali ipotesi è possibile scrivere:

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \mathcal{F}_e[\vec{e}(\vec{r},t)] \; , \tag{2.34}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \mathcal{F}_h[\vec{h}(\vec{r},t)] \; , \tag{2.35}$$

dove $\mathcal{F}_e$, $\mathcal{F}_h$ sono dei funzionali che descrivono il tipo di mezzo considerato. I campi $\vec{e}(\vec{r},t)$ e $\vec{h}(\vec{r},t)$ sono chiamati cause mentre i vettori $\vec{d}(\vec{r},t)$ e $\vec{h}(\vec{r},t)$ effetti.

In base al tipo dei funzionali si può classificare il mezzo come: lineare, isotropo, dispersivo nel tempo e/o nello spazio, omogeneo, stazionario.

In seguito considereremo solo mezzi *lineari* in cui cioè alla combinazione lineare di più cause corrisponde la combinazione lineare degli effetti.

Anche se nessun mezzo tranne il vuoto è esattamente lineare per ogni valore della causa, in molte applicazioni il mezzo si mantiene lineare nell'intervallo dei valori della causa di interesse pratico. In tal caso gli operatori $\mathcal{F}_e$, $\mathcal{F}_h$ risultano lineari e, per ragioni fisiche, di tipo integrale:

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \int \underline{\underline{g}}_e(\vec{r},\vec{r}';t,t') \cdot \vec{e}(\vec{r}',t')\, d\vec{r}'\, dt' \; , \tag{2.36}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \int \underline{\underline{g}}_h(\vec{r},\vec{r}';t,t') \cdot \vec{h}(\vec{r}',t')\, d\vec{r}'\, dt' \; , \tag{2.37}$$

dove l'integrazione è estesa a tutto lo spazio ed a tutti i tempi. Le funzioni $\underline{\underline{g}}_e(\vec{r},\vec{r}';t,t')$ e $\underline{\underline{g}}_h(\vec{r},\vec{r}';t,t')$, sono, nel caso più generale, delle diadi, in quanto l'effetto non è necessariamente parallelo alla causa, e rappresentano la risposta impulsiva del mezzo in corrispondenza della coordinata spazio temporale $(\vec{r},t)$ ad una eccitazione impulsiva applicata in $\vec{r}'$ all'istante t'.

Nel caso particolare il cui tali risposte impulsive risultano essere delle diadi diagonali con tutti gli elementi uguali, il mezzo è detto *isotropo* e le relazioni costitutive assumono la forma:

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \int g_e(\vec{r},\vec{r}';t,t')\,\underline{\underline{I}}\cdot\vec{e}(\vec{r}',t')\,d\vec{r}'\,dt' = \int g_e(\vec{r},\vec{r}';t,t')\,\vec{e}(\vec{r}',t')\,d\vec{r}'\,dt' \;, \tag{2.38}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \int g_h(\vec{r},\vec{r}';t,t')\,\underline{\underline{I}}\cdot\vec{h}(\vec{r}',t')\,d\vec{r}'\,dt' = \int g_h(\vec{r},\vec{r}';t,t')\,\vec{h}(\vec{r}',t')\,d\vec{r}'\,dt' \;, \tag{2.39}$$

dove con $\underline{\underline{I}}$ si è indicata la diade identità $\underline{\underline{I}} = \vec{x}\vec{x} + \vec{y}\vec{y} + \vec{z}\vec{z}$. Si noti come in tal caso le funzioni g_e e g_h risultano essere delle funzioni scalari e l'effetto è sempre allineato alla causa. In caso contrario il mezzo è detto *anisotropo* ed i vettori induzione elettrica e magnetica hanno generalmente direzione diversa da quella dei rispettivi campi.

Un mezzo fisicamente realizzabile deve essere *causale*, cioè l'effetto non deve precedere la causa. Ciò, insieme con l'ipotesi che il campo non possa propagarsi con velocità superiore alla velocità c della luce nel vuoto, assicura che

$$\underline{\underline{g}}_{e,h}(\vec{r},\vec{r}';t,t') = 0 \quad \text{per} \;\; t < t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \;. \tag{2.40}$$

Nel caso in cui poi l'effetto possa esprimersi in funzione della sola causa applicata all'istante t di osservazione il mezzo è detto *non dispersivo nel tempo*:

$$\underline{\underline{g}}_{e}(\vec{r},\vec{r}';t,t') = \underline{\underline{g}}'_{e}(\vec{r},\vec{r}';t)\,\delta(t-t') \;, \tag{2.41}$$

$$\underline{\underline{g}}_{h}(\vec{r},\vec{r}';t,t') = \underline{\underline{g}}'_{h}(\vec{r},\vec{r}';t)\,\delta(t-t') \;. \tag{2.42}$$

Viceversa se l'effetto dipende anche da i valori assunti dalla causa precedentemente all'istante t di osservazione il mezzo risulta essere *dispersivo nel tempo*.

Analogamente, un mezzo è chiamato *dispersivo* (*non dispersivo*) *nello spazio* se l'effetto il un punto $\vec{r}$ dello spazio dipende (non dipende) dai valori assunti dalla causa in punti dello spazio diversi da quello di osservazione $\vec{r}$.

Nel caso in cui un mezzo sia contemporaneamente non dispersivo nel tempo e nello spazio

$$\underline{\underline{g}}_{e}(\vec{r},\vec{r}';t,t') = \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{r},t)\,\delta(t-t')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \;, \tag{2.43}$$

$$\underline{\underline{g}}_{h}(\vec{r},\vec{r}';t,t') = \underline{\underline{\mu}}(\vec{r},t)\,\delta(t-t')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{2.44}$$

e le relazioni costitutive tra i vettori induzione ed i campi si semplificano come segue:

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{r},t) \cdot \vec{e}(\vec{r},t) \ , \tag{2.45}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \underline{\underline{\mu}}(\vec{r},t) \cdot \vec{h}(\vec{r},t) \ . \tag{2.46}$$

Le funzioni $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\mu}}$ prendono rispettivamente il nome di *permittività* (o *costante dielettrica*) e di *permeabilità* (o *costante magnetica*).

Infine un mezzo è considerato *omogeneo* se a una traslazione delle cause (cioè dei vettori campo elettrico o campo magnetico) corrisponde una uguale traslazione degli effetti (vettori induzione); viceversa *non omogeneo*. In particolare, l'omogeneità può essere spaziale o temporale, anche se in generale si preferisce la dizione di mezzo stazionario (o tempo invariante) a quella di mezzo omogeneo nel tempo ($\underline{\underline{g}}_{e,h}(\vec{r},\vec{r}';t,t') = \underline{\underline{g}}_{e,h}(\vec{r},\vec{r}';t-t')$), riservando l'appellativo di mezzo omogeneo, senza ulteriore specificazione, ad un mezzo omogeneo nello spazio ($\underline{\underline{g}}_{e,h}(\vec{r},\vec{r}';t,t') = \underline{\underline{g}}_{e,h}(\vec{r}-\vec{r}';t,t')$).

Nel caso in cui il mezzo risulti contemporaneamente stazionario e non dispersivo, sia nello spazio che nel tempo, la permittività $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e la permeabilità $\underline{\underline{\mu}}$ risulteranno delle funzioni costanti rispetto al tempo:

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{r}) \cdot \vec{e}(\vec{r},t) \ , \tag{2.47}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \underline{\underline{\mu}}(\vec{r}) \cdot \vec{h}(\vec{r},t) \ . \tag{2.48}$$

Analogamente nel caso in cui il mezzo risulti contemporaneamente omogeneo e non dispersivo nel tempo e nello spazio tali quantità risulteranno costanti rispetto allo spazio:

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \cdot \vec{e}(\vec{r},t) \ , \tag{2.49}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \underline{\underline{\mu}}(t) \cdot \vec{h}(\vec{r},t) \ . \tag{2.50}$$

Se invece il mezzo è supposto omogeneo e stazionario ma dispersivo nel tempo, l'omogeneità temporale permette di scrivere

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c} \underline{\underline{g}}_e(\vec{r},t-t') \cdot \vec{e}(\vec{r},t')\,dt' \ , \tag{2.51}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c} \underline{\underline{g}}_h(\vec{r},t-t') \cdot \vec{e}(\vec{r},t')\,dt' \ , \tag{2.52}$$

dove l'estremo superiore di integrazione è limitato al tempo t di osservazione per la casualità del mezzo. Si noti ora che gli integrali coinvolti in ciascuna delle due precedenti equazioni risultano essere dei prodotti di convoluzione, per cui operando la trasformata di Fourier rispetto alla variabile temporale è possibile legare le trasformate delle induzioni e dei campi tramite una semplice proporzionalità:

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega)\ , \tag{2.53}$$

$$\vec{B}(\vec{r},\omega) = \underline{\underline{\mu}}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{H}(\vec{r},\omega)\ , \tag{2.54}$$

dove

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{g}}_e(\vec{r},t)\exp(-j\omega t)\,dt\ , \tag{2.55}$$

$$\underline{\underline{\mu}}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{g}}_h(\vec{r},t)\exp(-j\omega t)\,dt\ . \tag{2.56}$$

Risultato analogo si ottiene nel caso di dispersività spaziale.

A causa di questa proporzionalità tra induzioni e campi risulta evidente che è conveniente studiare un mezzo dispersivo direttamente nel dominio trasformato. Ad esempio nel caso di una dispersività temporale sarà conveniente scrivere le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza esprimendole in funzione dei soli campi elettrico e magnetico e delle sorgenti:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},\omega) = -j\omega\underline{\underline{\mu}}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{H}(\vec{r},\omega) - \vec{J}_m(\vec{r},\omega)\ , \tag{2.57}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r},\omega) = j\omega\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega) + \vec{J}(\vec{r},\omega)\ , \tag{2.58}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega)\right] = \rho(\vec{r},\omega)\ , \tag{2.59}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\underline{\underline{\mu}}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{H}(\vec{r},\omega)\right] = \rho_m(\vec{r},\omega)\ . \tag{2.60}$$

2.3 Condizioni al contorno

Le equazioni di Maxwell in forma differenziale (2.3)–(2.6) sono valide in regioni dello spazio ove le proprietà fisiche del mezzo variano con continuità. Tuttavia, nel passaggio da un mezzo ad un altro le caratteristiche elettromagnetiche possono cambiare improvvisamente ed attraverso la superficie di separazione dei mezzi ci si può aspettare una discontinuità nei vettori di campo. Al fine di rendere la soluzione delle equazioni di Maxwell unica è necessario imporre, in corrispondenza della superficie di separazione tra diversi mezzi, delle condizioni aggiuntive denominate *condizioni al contorno*.

Per la determinazione di tali condizioni è necessario, in presenza di una discontinuità spaziale, utilizzare le equazioni di Maxwell in forma integrale:

$$\oint_C \vec{e}(\vec{r},t) \cdot \hat{i}_c \, d\ell = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{b}(\vec{r},t) \cdot \hat{n} \, dS \; , \tag{2.61}$$

$$\oint_C \vec{h}(\vec{r},t) \cdot \hat{i}_c \, d\ell = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{d}(\vec{r},t) \cdot \hat{n} \, dS + \iint_S \vec{j}(\vec{r},t) \cdot \hat{n} \, dS \; , \tag{2.62}$$

$$\oiint_S \vec{d}(\vec{r},t) \, dS = \iiint_V \rho(\vec{r},t) \, dV \; , \tag{2.63}$$

$$\oiint_S \vec{b}(\vec{r},t) \, dS = 0 \; , \tag{2.64}$$

dove per scambiare il segno di derivata con quello di integrale si è supposto che la superficie di separazione sia costante rispetto al tempo.

Condizioni di continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico. Studiamo adesso il comportamento del campo elettromagnetico sulla superficie di separazione tra due mezzi di caratteristiche elettomagnetiche diverse, ad esempio due mezzi lineari, isotropi, non dispersivi ed omogenei nel tempo e nello spazio.

Si consideri un punto P appartenente alla superficie S di separazione tra il *mezzo 1* caratterizzato da una pemeabilità ε_1, una permettività μ_1 ed una conducibilità σ_1 ed il *mezzo 2* caratterizzato da una pemeabilità ε_2, una permettività μ_2 ed una conducibilità σ_2. Sia $\hat{n}$ la normale alla superficie S nel punto P diretta dal mezzo 2 al mezzo 1 e sia S_0 la superficie rettangolare di lati ℓ e 2δ descritta in Fig. 2.2, supposta sufficientemente piccola da poter considerare il campi $\vec{e}_1$, $\vec{h}_1$ e $\vec{e}_2$, $\vec{h}_2$ uniformi (costanti rispetto alla coordinata spaziale). Applicando la eq. (2.61) si ha:

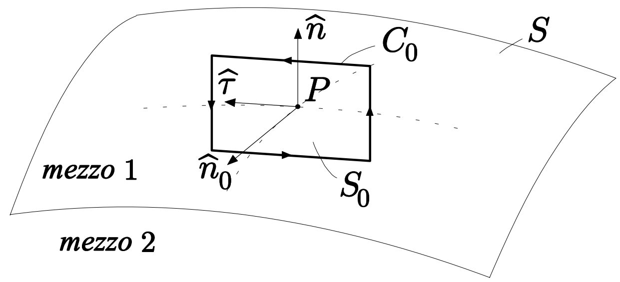

Figura 2.2: Geometria del problema

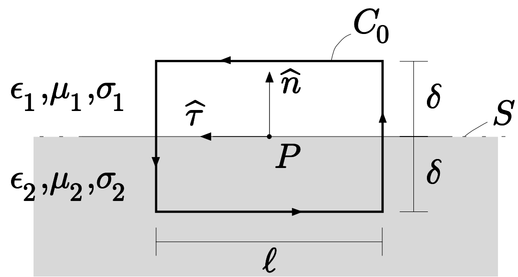

Figura 2.3: Geometria del problema

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\delta \vec{e}_1 \cdot \hat{n}\, d\ell + \int_0^\ell \vec{e}_1 \cdot \hat{\tau}\, d\ell - \int_0^\delta \vec{e}_1 \cdot \hat{n}\, d\ell + \\
&\qquad - \int_0^\delta \vec{e}_2 \cdot \hat{n}\, d\ell - \int_0^\ell \vec{e}_2 \cdot \hat{\tau}\, d\ell + \int_0^\delta \vec{e}_2 \cdot \hat{n}\, d\ell = \\
&\qquad = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta \int_0^\ell \vec{b}_1 \cdot \hat{n}_0\, d\tau\, dn - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta \int_0^\ell \vec{b}_2 \cdot \hat{n}_0\, d\tau\, dn \ , \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\ell \left(\vec{e}_1 \cdot \hat{\tau} - \vec{e}_2 \cdot \hat{\tau} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\ell \delta \left(\vec{b}_1 \cdot \hat{n}_0 + \vec{b}_2 \cdot \hat{n}_0 \right) \right] \ . \qquad (2.66)
$$

Anche se i vettori induzione magnetica possono essere discontinui all'interfaccia tra i due mezzi la loro ampiezza dovrà risultare per ragioni fisiche limitata. Ciò permette di asserire che, nel caso in cui si faccia tendere la superficie S_0 a zero ($\ell \to 0$, $\delta \to 0$), il secondo membro dell'eq. (2.66) si annulla, per cui:

$$
\vec{e}_1 \cdot \hat{\tau} = \vec{e}_2 \cdot \hat{\tau} \ . \qquad (2.67)
$$

Si noti che la scelta della superficie S_0 è del tutto arbitraria e la relazione appena scritta è valida per qualsiasi direzione del versore $\hat{n}_0$ ad essa normale e del corrispondente versore $\hat{\tau}$ tangente alla superficie S nel punto P.

Per eliminare l'arbitrarietà risulta conveniente esprimere il versore tangente presente nell'eq. (2.67) come $\hat{\tau} = \hat{n}_0 \times \hat{n}$, da cui

$$\vec{e}_1 \cdot (\hat{n}_0 \times \hat{n}) = \vec{e}_2 \cdot (\hat{n}_0 \times \hat{n}) \ , \tag{2.68}$$

ed avvalersi del fatto che il prodotto misto resta invariato permutando ciclicamente i fattori:

$$\hat{n}_0 \cdot (\hat{n} \times \vec{e}_1) = \hat{n}_0 \cdot (\hat{n} \times \vec{e}_2) \ . \tag{2.69}$$

Poiché l'equazione (2.69) deve essere soddisfatta per qualsiasi direzione del versore $\hat{n}_0$, essa sarà verificata se:

$$\hat{n} \times \vec{e}_1\big|_S = \hat{n} \times \vec{e}_2\big|_S \ . \tag{2.70}$$

Quest'ultima relazione esprime la continuità delle componenti del campo elettrico tangenziali alla superficie S di separazione dei due mezzi.

Considerando l'eq. (2.62) ed operando analogamente a quanto già visto per l'eq. (2.61) si perviene alla relazione:

$$\ell \left(\vec{h}_1 \cdot \hat{\tau} - \vec{h}_2 \cdot \hat{\tau} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\ell\delta \left(\vec{d}_1 \cdot \hat{n}_0 + \vec{d}_2 \cdot \hat{n}_0 \right) \right] + \ell\delta \left(\vec{j}_1 \cdot \hat{n}_0 + \vec{j}_2 \cdot \hat{n}_0 \right) \ . \tag{2.71}$$

Anche in questo caso se si fa tendere la superficie S_0 a zero ($\ell \to 0$, $\delta \to 0$), poiché per un mezzo reale l'ampiezza del vettore induzione e della densità di corrente elettrica devono risultare, per ragioni fisiche, limitate, si avrà:

$$\vec{h}_1 \cdot \hat{\tau} = \vec{h}_2 \cdot \hat{\tau} \ , \tag{2.72}$$

ovvero, per l'arbitrarietà nella scelta del versore $\hat{\tau}$,

$$\hat{n} \times \vec{h}_1\big|_S = \hat{n} \times \vec{h}_2\big|_S \ . \tag{2.73}$$

Se tuttavia si suppone che uno dei due mezzi, ad esempio il mezzo 2, sia costituito da un *conduttore elettrico perfetto*, cioè da un mezzo ideale caratterizzato da una conducibilità infinita ($\sigma_2 \to \infty$), non è più possibile ipotizzare limitata la densità di corrente $\vec{j}_2$ in prossimità della superficie di separazione S tra i mezzi. Ciò comporta che al tendere della superficie S_0 a zero l'eq. (2.71) risulta:

$$\vec{h}_1 \cdot \hat{\tau} - \vec{h}_2 \cdot \hat{\tau} = \lim_{\delta \to 0} \int_0^\delta \vec{j}_2 \cdot \hat{n}_0 dn \neq 0 \ . \tag{2.74}$$

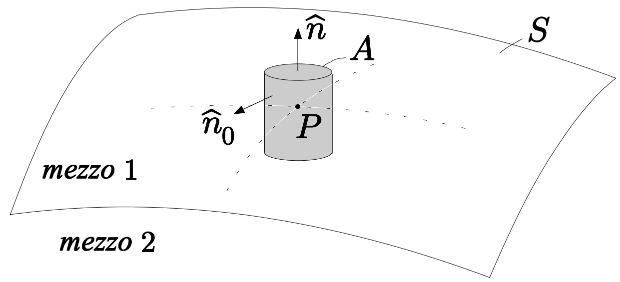

Figura 2.4: Geometria del problema

Se si introduce una *densità di corrente superficiale* $\vec{j}_s$ $[A/m]$

$$\vec{j}_s = \lim_{\delta \to 0} \int_0^\delta \vec{j}_2 dn < \infty \tag{2.75}$$

l'eq. (2.74) risulta:

$$\vec{h}_1 \cdot \hat{\tau} - \vec{h}_2 \cdot \hat{\tau} = \vec{j}_s \cdot \hat{n}_0 \tag{2.76}$$

e quindi, per l'arbitrarietà nella scelta del versore $\hat{\tau}$,

$$\hat{n} \times \vec{h}_1 - \hat{n} \times \vec{h}_2 = \vec{j}_s \; . \tag{2.77}$$

Nello stesso tempo, nel conduttore elettrico perfetto, il campo elettrico $\vec{e}_2$ deve risultare nullo altrimenti al suo interno la densità di corrente elettrica risulterebbe infinita, dovendo essere soddisfatta la relazione costitutiva $\vec{j}_2 = \sigma \vec{e}_2$. Ora, poiché anche in un conduttore elettrico perfetto il campo elettrico è legato al vettore induzione magnetica dalla relazione $\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial b / \partial t$, segue che all'interno del conduttore la componente dinamica sia dell'induzione magnetica che, per le relazioni costitutive, del campo magnetico risulta nulla. Ciò comporta che le condizioni al contorno per un conduttore elettrico perfetto si trasformano come segue:

$$\hat{n} \times \vec{e}_1 \big|_S = 0 \tag{2.78}$$

$$\hat{n} \times \vec{h}_1 \big|_S = \vec{j}_s \; . \tag{2.79}$$

Condizioni di continuità delle componenti normali dei vettori indizione elettrica e magnetica. Si consideri l'equazione (2.64) e si scelga un volume V_0 a cavallo dei due mezzi racchiuso dalla superficie S_0 così come schematizzato in Fig. 2.4. Il volume V_0 di altezza 2δ e base A è supposto sufficientemente piccolo da poter considerare all'interno di esso uniformi i

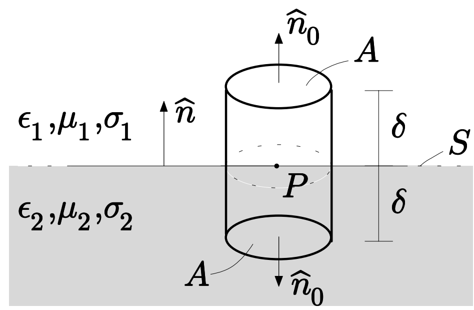

Figura 2.5: Geometria del problema

campi in entrambi i mezzi. In tali ipotesi il flusso totale del vettore induzione magnetica attraverso le pareti laterali risulta nullo e la relazione (2.64) assume la forma

$$A\vec{b}_1 \cdot \hat{n} + A\vec{b}_2 \cdot (-\hat{n}) = 0\,, \tag{2.80}$$

da cui, essendo la superficie A arbitraria anche se infinitesima, risulta:

$$\vec{b}_1 \cdot \hat{n}\big|_S = \vec{b}_2 \cdot \hat{n}\big|_S\,. \tag{2.81}$$

Quest'ultima relazione esprime la continuità della componente normale del vettore induzione magnetica attraverso la superficie di separazione dei due mezzi.

Analogamente applicando l'equazione (2.63) sul volume V_0 si ottiene:

$$A(\vec{d}_1 - \vec{d}_2) \cdot \hat{n} = A\delta(\rho_1 + \rho_2)\,. \tag{2.82}$$

Poiché al tendere del volume V_0 a zero l'ampiezza della densità di carica all'interfaccia tra i due mezzi è limitata, la precedente relazione risulta:

$$\vec{d}_1 \cdot \hat{n}\big|_S = \vec{d}_2 \cdot \hat{n}\big|_S\,, \tag{2.83}$$

esprimendo così la continuità della componente normale del vettore induzione elettrica attraverso la superficie di separazione dei due mezzi.

Nel caso in cui invece uno dei due mezzi, ad esempio il mezzo 2, sia un conduttore elettrico perfetto sarà presente una densità di carica superficiale

$$\rho_s = \lim_{\delta\to 0} \int_0^\delta \rho_2 dn < \infty\,, \tag{2.84}$$

per cui, non essendo presente vettore induzione elettrica nel mezzo conduttore ($d_2 = 0$) la relazione (2.82) assume la forma:

$$\vec{d}_1 \cdot \hat{n}\big|_S = \rho_s\,. \tag{2.85}$$

Risultando contemporaneamente anche $\vec{b}_2 = 0$, la relazione (2.81) per un conduttore elettrico perfetto si trasforma in:

$$\vec{b}_1 \cdot \hat{n}\big|_S = 0\,. \tag{2.86}$$