Premesse matematiche

2.8 Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione reale, o complessa, di variabile reale t, che soddisfi la condizione di Dirichlet[1], e sia a modulo integrabile, cioe':

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty\,. \tag{2.1}$$

In tale ipotesi per ogni valore reale del parametro ω esiste l'integrale

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \tag{2.2}$$

e $F(\omega)$ e' detta *trasformata di Fourier* della funzione $f(t)$. La funzione $F(\omega) = |F(\omega)| \exp\left[j\phi(\omega)\right]$ e' in generale una funzione complessa e la sua funzione inversa (*trasformata inversa di Fourier*) e' definita dall'espressione

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega\,. \tag{2.3}$$

La condizione (2.1) e' una condizione sufficiente ma non necessaria, comunque e' rispettata da ogni segnale fisico in quanto cio' equivale a richiedere che sia verificata la condizione che in segnale abbia energia finita.

Nel caso in cui la funzione $f(t)$ sia reale si dimostra che $F(-\omega) = F^*(\omega)$

[1] La funzione $f(t)$ e' cioe' continua, tranne al piu' in un numero finito di punti in cui e' supposto esistere il limite destro e sinistro, derivabile, eccetto al piu' in un numero finito di punti.

da cui

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \Big[F(-\omega)\exp(-j\omega t) + F(\omega)\exp(j\omega t)\Big]\,d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} 2\Re e\Big\{F(\omega)\exp(j\omega t)\Big\}\,d\omega = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} |F(\omega)|\cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big)\,d\omega \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Quest'ultimo integrale puo' essere interpretato come la somma di infinite funzioni sinusoidali del tipo

$$
\frac{1}{\pi}|F(\omega)|\cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\Re e\Big\{F(\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega\Big\} \qquad (2.5)
$$

aventi una specifica fase (funzione dispari di ω) e una specifica ampiezza infinitesima (funzione pari di ω).

2.8.1 Alcune proprieta' della trasformata di Fourier

Sia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$, allora:

1. *linearita'*

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)\,,$$

2. *traslazione temporale*

$$\mathcal{F}\{f(t \pm t_0)\} = F(\omega)\exp(\pm j\omega t_0)\,,$$

3. *traslazione in frequenza*

$$\mathcal{F}\{f(t)\exp(\pm j\omega_0 t)\} = F(\omega \mp \omega_0)\,,$$

4. *compressione temporale*

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F(\omega/a) \qquad \forall a \neq 0, a \in \mathbb{R}\,,$$

5. *coniugazione*

$$\mathcal{F}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega)\,,$$

6. *reciprocita'*

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)\,,$$

7. *funzioni reali*

$$f(t) \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; F^*(\omega) = F(-\omega)\,,$$

8. *funzioni pari*

$$f(t) = f(-t) \;\Rightarrow\; F(\omega) = H(-\omega)\,,$$

$$\text{dove } H(\omega) \in \mathbb{R} \text{ e } H(-\omega) = H(\omega)\,,$$

9. *funzioni dispari*

$$f(t) = -f(-t) \;\Rightarrow\; F(\omega) = jH(\omega)\,,$$
$$\text{dove } H(\omega) \in \mathbb{R} \text{ e } H(-\omega) = -H(\omega)\,,$$

10. *derivate temporali*

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t)\right\} = (j\omega)^n F(\omega)\,, \qquad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots\,,$$

11. *derivazione in frequenza*

$$\mathcal{F}\left\{(-jt)^n f(t)\right\} = \frac{\partial^n F(\omega)}{\partial \omega^n}\,, \qquad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots\,,$$

12. *integrazione*

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (-jt)^n f(t) dt\right\} = \left.\frac{\partial^n F(\omega)}{\partial \omega^n}\right|_{\omega=0}\,, \qquad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots\,,$$

$$\text{nel caso } n = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt\right\} = F(0)\,,$$

13. *convoluzione temporale*

$$\mathcal{F}\left\{f(t) \otimes g(t)\right\} = F(\omega) G(\omega)\,,$$
$$\text{dove } \; f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau\,,$$

14. *convoluzione in frequenza*

$$\mathcal{F}\left\{f(t) g(t)\right\} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes G(\omega)\,,$$
$$\text{dove } \; F(\omega) \otimes G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) G(t-\tau) d\tau\,,$$

15. *teorema di Parseval*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega\,.$$

2.9 La funzione delta di Dirac

La funzione delta di Dirac monodimensionale, nota anche come *funzione impulsiva*, puo' essere definita dalle relazioni

$$\delta(x) = 0\,, \qquad \forall x \neq 0\,, \tag{2.6a}$$

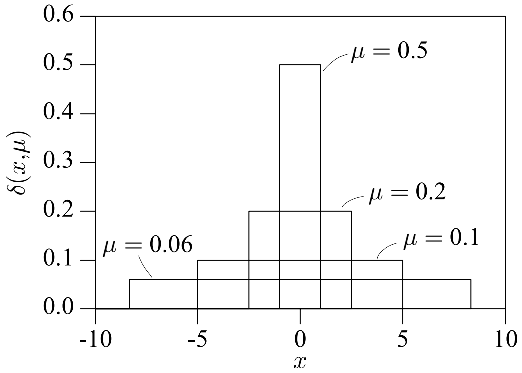
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1\,. \tag{2.6b}$$

La funzione delta di Dirac non puo' essere considerata una funzione nel vero senso della parola in quanto se fosse nulla ovunque eccetto in un solo punto il suo integrale dovrebbe risultare nullo. E' piu' appropriato considerare la funzione delta di Dirac come caso limite di una classe di funzioni $\delta(x,\mu)$ aventi area unitaria, cioe'

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,\mu)\, dx = 1 \qquad \forall\mu\,, \tag{2.7}$$

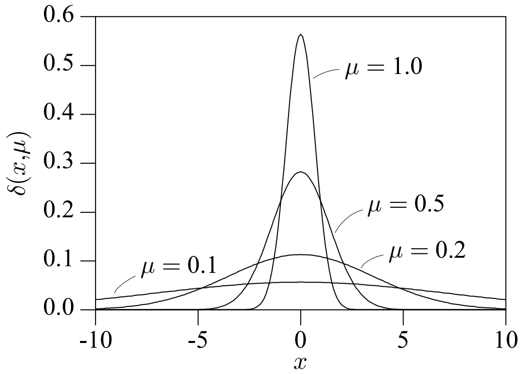
le quali al crescere della variabile μ differiscono apprezzabilmente da zero solo in un sempre piu' piccolo intervallo della variabile x attorno all'origine. Numerose sono le rappresentazioni di tale classe di funzioni, ad esempio:

$$\delta(x,\mu) = \begin{cases} 0 \text{ per } |x| > 1/2\mu \\ \mu \text{ per } |x| \le 1/2\mu \end{cases} \tag{2.8}$$



oppure

$$\delta(x,\mu) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \exp(-\mu^2 x^2)\,. \tag{2.9}$$



La funzione delta di Dirac monodimensionale puo' essere quindi pensata come limite per $\mu \to \infty$ di una delle suddette classi di funzioni, cioe':

$$\delta(x) = \lim_{\mu\to\infty} \delta(x,\mu)\,. \tag{2.10}$$

La definizione della funzione di delta Dirac e' facilmente estendibile a uno spazio tridimensionale:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x, y, z) = 0\,, \qquad \forall |\vec{r}| \neq 0\,, \tag{2.11a}$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r})\, dV = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 1\,, \tag{2.11b}$$

dove con $\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$ si e' indicato il generico vettore posizione.

Nel caso di un generico sistema di coordinate curvilinee (u, v, w) l'elemento di volume in un punto regolare dello spazio risulta:

$$dV = \sqrt{g}\, du\, dv\, dw = |\mathbb{J}|\, du\, dv\, dw\,, \tag{2.12}$$

dove con $|\mathbb{J}|$ si e' indicato il determinante dello Jacobiano della trasformazione

$$\mathbb{J}(u, v, w) = \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{bmatrix}\,. \tag{2.13}$$

Ne segue che la funzione delta di Dirac tridimensionale puo' essere espressa in termini di funzioni delta di Dirac monodimensionali tramite la relazione:

$$\delta(u - u_0, v - v_0, w - w_0) = \frac{\delta(u - u_0)\delta(v - v_0)\delta(w - w_0)}{|\mathbb{J}(u_0, v_0, w_0)|}\,. \tag{2.14}$$

Nei punti singolari del sistema di coordinate, in cui il determinante dello Jacobiano si annulla, la trasformazione dal sistema di coordinate (x, y, z) al sistema (u, v, w) non e' piu' biunivoca e almeno una delle coordinate u, v, w e' ignorabile (cioe' la conoscenza di tale coordinata e' superflua ai fini della trasformazione). Si indichi con J_k l'integrale del determinante dello Jacobiano nella generica coordinata ignorabile k, cioe'

$$J_k = \int_{\substack{\text{dominio di} \\ \text{esistenza di } k}} |\mathbb{J}(k)|\; dk\,, \tag{2.15}$$

in tal caso la funzione delta di Dirac tridimensionale risulta il prodotto delle funzioni delta di Dirac delle coordinate non ignorabili diviso J_k. Ad esempio, per un sistema di riferimento cilindrico

$$|\mathbb{J}(\rho, \phi, z)| = \sqrt{g} = \sqrt{\rho^2} = \rho\,, \tag{2.16}$$

per cui

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)\delta(z - z_0)}{\rho_0}\,. \tag{2.17}$$

Tuttavia tutti i punti dell'asse z sono punti singolari per cui se si considera il caso $\rho_0 = 0$ la coordinata ϕ risulta una coordinata ignorabile. Poiche'

$$J_\rho = \int_0^{2\pi} |\mathbb{J}(\rho, \phi, z)| \, d\phi = \int_0^{2\pi} \rho \, d\phi = 2\pi\rho \,, \tag{2.18}$$

si ottiene:

$$\delta(\rho, z - z_0) = \frac{\delta(\rho)\delta(z - z_0)}{2\pi\rho} \,. \tag{2.19}$$

La funzione delta di Dirac gode di numerose proprieta', tra cui

1. $\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \, dV = f(\vec{r}_0) \,,$

2. $f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = f(\vec{r}_0)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \,,$

3. $\vec{r}\delta(\vec{r}) = 0 \,,$

4. $\delta(a\vec{r}) = \frac{1}{|a|}\delta(\vec{r}) \qquad \forall a \in \mathbb{R} \,, \; a \neq 0 \,,$

5. $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}) \,,$

6. $\iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)\delta(\vec{r} - \vec{r}_2) \, dV = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,,$

7. $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \,,$

8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) \, dt = 1 \,,$

9. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j\omega t) \, d\omega = \delta(t) \,.$