Energia associata ad un campo elettromagnetico

3.1 Teorema di Poynting nel dominio del tempo

Nel 1884 J. H. Poynting notò che il prodotto scalare tra il vettore di campo elettrico e la densità di corrente $\vec{e}(\vec{r},t)\cdot\vec{j}(\vec{r},t)$ aveva dimensioni di una potenza per unità di volume. Pensò quindi di moltiplicare scalarmente per il campo elettrico la legge di Ampere generalizzata in forma differenziale

$$\vec{e}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla}\times\vec{h}(\vec{r},t)=\vec{e}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{d}(\vec{r},t)}{\partial t}+\vec{e}(\vec{r},t)\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \tag{3.1}$$

e sempre scalarmente, ma per il campo magnetico, la legge di Faraday

$$\vec{h}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla}\times\vec{e}(\vec{r},t)=-\vec{h}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{b}(\vec{r},t)}{\partial t}\,. \tag{3.2}$$

Memore del fatto che la divergenza di un prodotto vettoriale è esprimibile come

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{e}\times\vec{h})=\vec{h}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{e}-\vec{e}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{h} \tag{3.3}$$

pensò di sottrarre l'equazione (3.1) all'equazione (3.2). Considerando quindi la presenza nel mezzo di una conducibilità $\sigma(\vec{r},t)$ e di sorgenti di corrente $\vec{j}_0(\vec{r},t)$, scompose il prodotto

$$\vec{e}(\vec{r},t)\cdot\vec{j}(\vec{r},t)=\sigma(\vec{r},t)\,|\vec{e}(\vec{r},t)|^2+\vec{e}(\vec{r},t)\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \tag{3.4}$$

ottenendo la relazione

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{e}\times\vec{h})+\vec{e}\frac{\partial\vec{d}}{\partial t}+\vec{h}\frac{\partial\vec{d}}{\partial t}+\sigma\,|\vec{e}|^2=-\vec{e}\cdot\vec{j}_0\,, \tag{3.5}$$

Figura 3.1: .

in cui le dipendenze spaziali e temporali sono state tralasciate per semplicità di scrittura. Integrando su un volume V limitato dalla superficie che racchiude la sorgenti J. H. Poynting pervenne poi, come del resto nello stesso anno anche O. Heaviside, alla famosa forma che da lui prende il nome:

$$\oint_S \left(\vec{e} \times \vec{h}\right) \cdot \widehat{n}\, dS + \int_V \left(\vec{e}\frac{\partial \vec{d}}{\partial t} + \vec{h}\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right) dV + \int_V \sigma |\vec{e}|^2\, dV = -\int_V \vec{e} \cdot \vec{j}_0\, dV\,, \tag{3.6}$$

con $\widehat{n}$ normale esterna alla superficie S. Esaminando questa relazione si può subito vedere che il termine a secondo membro ha dimensioni di una potenza e rappresenta la potenza fornita dalle sorgenti presenti nel volume V. Analogamente il termine a primo membro, contenente la conducibilità σ, ha dimensioni di una potenza e rappresenta la potenza dissipata sotto forma di calore, per effetto Joule, a causa della conducibilità del mezzo. Il temine

$$\int_V \left(\vec{e}\frac{\partial \vec{d}}{\partial t} + \vec{h}\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right) dV \tag{3.7}$$

ha anch'esso dimensioni di una potenza. Nel caso in cui il mezzo contenuto nel volume V sia lineare, isotropo e non dispersivo nel tempo è facile verificare che tale termine rappresenta la variazione temporale dell'energia elettrica e magnetica immagazzinata nel volume V. Infatti in tali ipotesi

$$\vec{d}(\vec{r},t) = \varepsilon(\vec{r})\vec{e}(\vec{r},t)\,, \tag{3.8}$$

$$\vec{b}(\vec{r},t) = \mu(\vec{r})\vec{h}(\vec{r},t)\,. \tag{3.9}$$

Inoltre per un qualsiasi vettore $\vec{a}(t)$ risulta sempre valida la relazione

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial |\vec{a}(t)|^2}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{a}(t)\cdot\vec{a}(t)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\vec{a}(t)\cdot\frac{\partial \vec{a}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{a}(t)}{\partial t}\cdot\vec{a}(t)\right] = \vec{a}(t)\cdot\frac{\partial \vec{a}(t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{3.10}$$

Perciò, analogamente al caso statico, è possibile scrivere

$$\int_V \left(\vec{e}\frac{\partial \vec{d}}{\partial t} + \vec{h}\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right) dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon|\vec{e}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\vec{h}|^2\right) dV = \frac{\partial}{\partial t}\left[W_e + W_m\right]\,, \tag{3.11}$$

dove con W_e e W_m si sono indicate, rispettivamente, l'energia elettrica e magnetica immagazzinate nel volume V. Nel caso in cui si supponga che la rappresentazione formale dell'energia elettrica e magnetica risulti la stessa del caso statico si può quindi dare al termine significato di variazione temporale della energia elettromagnetica nel volume V.

Rimane da analizzare il termine dell'equazione (3.6) in cui compare l'integrale di superficie. Tale termine risulta essere il flusso di un vettore, avente dimensione di una densità di potenza per unità di superficie, attraverso la superficie S che racchiude le sorgenti. Esso rappresenta quindi la potenza che fluisce attraverso la superficie S. Si definisce quindi *vettore di Poynting* il vettore

$$\vec{s}(\vec{r},t) = \vec{e}(\vec{r},t) \times \vec{h}(\vec{r},t) \tag{3.12}$$

che rappresenta la densità di potenza fluente nel punto individuato dal vettore posizione $\vec{r}$ all'istante t. Si noti come, per la convenzione scelta per il versore $\widehat{n}$, il termine

$$\oint_S \left(\vec{e} \times \vec{h}\right) \cdot \widehat{n}\, dS = \oint_S \vec{s} \cdot \widehat{n} dS \tag{3.13}$$

risulti positivo per una potenza fluente all'esterno del volume V, negativo per una potenza entrante.

3.2 Teorema di Poynting nel dominio della frequenza

Nella trattazione finora eseguita si è tacitamente assunto che nel volume V non fossero presenti perdite per isteresi dielettrica o magnetica. Qualora queste fossero presenti e Q fosse l'energia dissipata in un ciclio di isteresi, per un campo in regime sinusoidale avente frequenza f, si dovrà tenere conto anche di una perdita di energia pari a Qf [Joule/sec]. Tuttavia nel caso di mezzi in cui è presente isteresi o di mezzi dispersivi nel tempo è preferibile riformulare il bilancio energetico di Poynting nel dominio della frequenza.

Considerando un mezzo isotropo con permettività elettrica e magnetica esprimibili come:

$$\varepsilon(\vec{r},\omega) = \varepsilon_1(\vec{r},\omega) - j\varepsilon_2(\vec{r},\omega)\,, \tag{3.14}$$
$$\mu(\vec{r},\omega) = \mu_1(\vec{r},\omega) - j\mu_2(\vec{r},\omega)\,. \tag{3.15}$$

Procedendo analogamente a quanto già visto nel dominio del tempo ed introducendo l'operatore $*$ complesso coniugato, si ottiene

$$\vec{H}^* \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu|\vec{H}|^2\,, \tag{3.16}$$
$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}^* = -j\omega\varepsilon^*|\vec{E}|^2 + \sigma|\vec{E}|^2 + \vec{E} \cdot \vec{J}_0^*\,, \tag{3.17}$$

da cui sottraendo la seconda equazione dalla prima risulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] - j\omega\varepsilon^* |\vec{E}|^2 + j\omega\mu |\vec{H}|^2 + \sigma |\vec{E}|^2 = -\vec{E} \cdot \vec{J}_0^* \,. \tag{3.18}$$

Moltiplicando entrambi i membri per 1/2 si definisce la quantità

$$\vec{S}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] = \vec{S}_r + j\vec{S}_j \tag{3.19}$$

vettore di Poynting nel dominio della frequenza. Scindendo la potenza dovuta alle sorgenti in una parte reale ed una immaginaria

$$-\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}_0^* = P_r + jP_j \tag{3.20}$$

ed eguagliando parte reale ed immaginaria dell'equazione (3.18), tenendo conto della forma complessa delle permettività, si ottiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}_r + \omega \left[\frac{1}{2}\varepsilon_2 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu_2 |\vec{H}|^2 \right] + \frac{1}{2}\sigma |\vec{E}|^2 = P_r \,, \tag{3.21}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}_j + 2\omega \left[\frac{1}{4}\mu_1 |\vec{H}|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_1 |\vec{E}|^2 \right] = P_j \,. \tag{3.22}$$

Per esaminare in dettaglio i singoli termini è utile introdurre alcune proprietà di cui godono i campi in regime sinusoidale. Definendo la media temporale sul periodo T di una funzione reale $a(t)$ come

$$< a(t) >= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t)\, dt \,, \tag{3.23}$$

è possibile dimostrare che sono sempre verificate le seguenti relazioni, in cui $F(\omega)$ e $G(\omega)$ risultano essere i fasori delle funzioni $f(t)$ e $g(t)$:

$$< f(t) g(t) > = \frac{1}{2} \Re \left\{ F(\omega) G^*(\omega) \right\} \,, \tag{3.24}$$

$$< f(t)^2 > = \frac{1}{2} |F(\omega)|^2 \,, \tag{3.25}$$

$$< f(t) \frac{\partial g(t)}{\partial t} > = \frac{1}{2} \Re \left\{ -j\omega F(\omega) G^*(\omega) \right\} \,. \tag{3.26}$$

Utilizzando queste relazioni è immediato verificare che

$$< \vec{e}(t) \cdot \vec{j}_0(t) > = \frac{1}{2}\Re\left\{-\vec{E}(\omega)\cdot\vec{J}_0^*(\omega)\right\}\,, \tag{3.27}$$

$$< \vec{e}(t) \cdot \frac{\partial \vec{d}(t)}{\partial t} > = \frac{1}{2}\Re\left\{-j\omega\varepsilon^*(\omega)|\vec{E}(\omega)|^2\right\} = \frac{\omega}{2}\varepsilon_2(\omega)|\vec{E}(\omega)|^2\,, \tag{3.28}$$

$$< \vec{h}(t) \cdot \frac{\partial \vec{b}(t)}{\partial t} > = \frac{1}{2}\Re\left\{-j\omega\mu^*(\omega)|\vec{H}(\omega)|^2\right\} = \frac{\omega}{2}\mu_2(\omega)|\vec{H}(\omega)|^2\,, \tag{3.29}$$

$$< \sigma|\vec{e}(t)|^2 > = \frac{1}{2}\sigma|\vec{E}(\omega)|^2\,. \tag{3.30}$$

Si integri ora l'equazione (3.21) sul volume V racchiuso dalla superficie S:

$$\oint_S \vec{S}_r\cdot\hat{n}\,dS + \omega\int_V\left[\frac{\varepsilon_2|\vec{E}|^2}{2}+\frac{\mu_2|\vec{H}|^2}{2}\right]dV + \int_V \frac{\sigma|\vec{E}|^2}{2}\,dV = \int_V P_r\,dV\,. \tag{3.31}$$

La potenza attiva media nel periodo T fornita dalle sorgenti, rappresentata dal termine a secondo membro, risulta in parte dissipata sotto forma di calore a causa della conducibilità presente nel mezzo e delle perdite per isteresi elettrica e magnetica, di cui gli integrali di volume a primo membro ne rappresentano la potenza media dissipata nel periodo, ed in parte bilanciata dalla potenza media fluente attraverso la superficie S.

Utilizzando inoltre le relazioni (3.24) e (3.26) è poi possibile legare l'energia elettrica e magnetica media immagazzinata nel volume V con le espressioni che appaiono nella equazione (3.22). Infatti

$$< \frac{1}{2}\vec{e}(t)\cdot\vec{d}(t) > = \frac{1}{2}\Re\left\{\frac{1}{2}\vec{E}(\omega)\cdot\varepsilon^*(\omega)\vec{E}(\omega)\right\} = \frac{\varepsilon_1|\vec{E}(\omega)|^2}{4}\,, \tag{3.32}$$

$$< \frac{1}{2}\vec{h}(t)\cdot\vec{b}(t) > = \frac{1}{2}\Re\left\{\frac{1}{2}\vec{H}(\omega)\cdot\mu^*(\omega)\vec{H}(\omega)\right\} = \frac{\mu_1|\vec{H}(\omega)|^2}{4}\,. \tag{3.33}$$

Integrando poi anche l'espressione (3.22) sul volume V si ottiene

$$\oint_S \vec{S}_j\cdot\hat{n}\,dS + 2\omega\int_V\left[\frac{\mu_1|\vec{H}|^2}{4}-\frac{\varepsilon_1|\vec{E}|^2}{4}\right]dV = \int_V P_j\,dV\,. \tag{3.34}$$

da cui si può dedurre che la potenza reattiva messa a disposizione dalle sorgenti compensa la differenza di energia elettromagnetica media (o pseudo energia nel caso di mezzi dispersivi) immagazzinata sia all'interno del volume V, di cui tiene conto l'integrale di volume a primo membro, sia all'esterno, di cui tiene conto l'integrale di superficie.