

Capitolo 4

Il problema dell'adattamento

Il problema consiste nel collegare un carico di impedenza Z_u ad un generatore di impedenza interna Z_g tramite una linea di trasmissione supposta priva di perdite, di impedenza caratteristica R_0 , ottenendo il massimo trasferimento di potenza (Fig. 4.1). Se Z_{in} e' l'impedenza che la linea chiusa sul carico Z_u presenta all'ingresso del generatore (Sez. AA'), la potenza fornita dal generatore al carico risulta massima qualora si verifichi la condizione¹:

$$Z_{in} = Z_g^* . \quad (4.1)$$

¹La potenza attiva fornita dal generatore all'impedenza $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ risulta

$$P_a = \frac{1}{2} |V_g|^2 R_{in} / |Z_g + Z_{in}|^2 = \frac{1}{2} |V_g|^2 R_{in} / [(R_g + R_{in})^2 + (X_g + X_{in})^2] .$$

E' evidente che al variare di X_{in} essa risultera' massima per $X_{in} = -X_g$ e sara' pari a

$$P_a|_{X_{in}=-X_g} = \frac{1}{2} |V_g|^2 R_{in} / (R_g + R_{in})^2 .$$

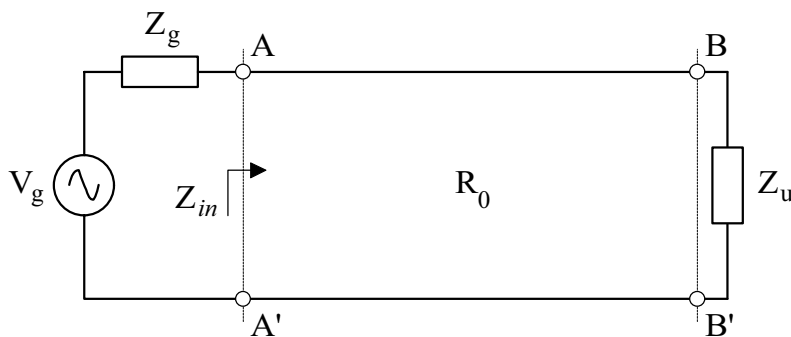


Figura 4.1: Schema del collegamento di un generatore reale ad un carico tramite una linea di trasmissione.

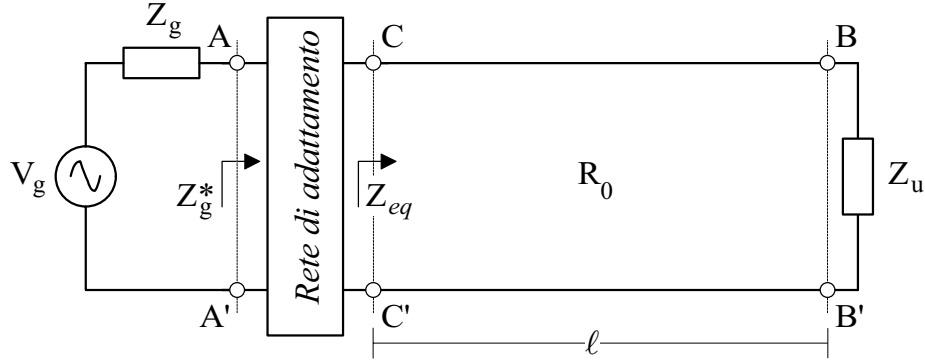


Figura 4.2: Possibile posizionamento della rete di adattamento.

In tal caso si ha il massimo trasferimento di potenza e si dice che è realizzata la condizione di adattamento.

In generale tuttavia una linea chiusa su un generico carico Z_u presenta, alla sezione AA' , una impedenza $Z_{in} \neq Z_g^*$ per cui si rende necessario inserire lungo la linea degli opportuni dispositivi, comunemente chiamati reti di adattamento, capaci di assicurare il richiesto valore di impedenza all'ingresso del generatore.

Si vuole ora discutere il posizionamento lungo la linea di una o più reti di adattamento in relazione ai vantaggi e svantaggi che ciò comporta, rimandando la descrizione del funzionamento di tali dispositivi ai paragrafi successivi.

In particolare una possibile configurazione è quella in cui la rete di adattamento è interposta tra il generatore e la linea di trasmissione ed agisce in modo tale che l'impedenza Z_{eq} che la linea presenta alla sezione CC' sia trasformata in una impedenza $Z_{in} = Z_g^*$ alla sezione AA' (Fig. 4.2). Tale configurazione ha il pregio di impiegare una sola rete di adattamento ma è sconsigliabile nel caso in cui la linea si possa ritenere lunga in termini di lunghezza d'onda. Ciò è dovuto principalmente al fatto che la rete di adattamento, per funzionare correttamente, deve essere posizionata ad una specifica distanza dal carico, distanza misurata in termini di lunghezza d'onda. Ora una piccola variazione nella frequenza operativa, dovuta ad esempio

Al variare di R_{in} si ottiene invece un massimo per

$$\left. \frac{dP_a}{dR_{in}} \right|_{X_{in} = -X_g} = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{(R_{in} + R_g)^2 - 2R_{in}(R_g + R_{in})}{(R_g + R_{in})^4} = 0.$$

Poiché $R_{in} \in \mathbb{R}^+$ e $R_g \in \mathbb{R}^+$ l'ultima condizione sarà verificata per $R_{in} = R_g$.

al fatto che il segnale informativo presenta comunque una certa banda di frequenza, provoca una piccola variazione nella lunghezza d'onda λ e quindi nel valore della costante di propagazione $\beta = 2\pi/\lambda$. Se la rete di adattamento e' posta ad una distanza $\ell \gg \lambda$ la conseguente variazione della quantita' $\beta\ell$ puo' risultare una apprezzabile frazione di radiante e quindi modificare sensibilmente l'impedenza vista dal generatore attraverso la rete. Si supponga infatti che la rete di adattamento debba essere posizionata ad una ben determinata frazione δ della lunghezza d'onda dal carico. Poiche' alla generica frequenza di lavoro f_0 le quantita' in gioco sono periodiche di periodo λ_0 , la precedente ipotesi individuerà in realta' infinite sezioni poste a distanza d_0 dal carico, dove:

$$d_0 = \delta\lambda_0 + n\lambda_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Consideriamo ora una piccola variazione di frequenza $\Delta f \ll f_0$ a cui corrisponderà una piccola variazione della lunghezza d'onda $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. Alla nuova frequenza $f_1 = f_0 + \Delta f$, per un corretto funzionamento, sarà necessario posizionare la rete ad una distanza d_1 dal carico pari a:

$$d_1 = \delta\lambda_1 + n\lambda_1 = (\delta\lambda_0 + n\lambda_0) + \delta\Delta\lambda + n\Delta\lambda = d_0 + \delta\Delta\lambda + n\Delta\lambda. \quad (4.3)$$

La differenza tra le sezioni individuate alle due frequenze in gioco risulterà quindi:

$$d_1 - d_0 = \delta\Delta\lambda + n\Delta\lambda. \quad (4.4)$$

E' evidente come tale differenza risulta sempre piu' grande all'aumentare del valore intero n e come puo' diventare apprezzabile anche per $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ con $n \gg 1$. Cio' comporta che la rete di adattamento, anche nel caso in cui le variazioni di frequenza intorno a quella di lavoro siano molto piccole, non opera correttamente se posizionata a molte lunghezze d'onda ($n \gg 1$) dal carico.

Esercizio 4.1 *Per una linea in aria, priva di perdite, di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$, chiusa su un carico $Z_u = 100 \Omega$ e lunga $\ell = 10 \text{ m}$, si determini sia la variazione della sua lunghezza in termini di lunghezza d'onda per le frequenze di lavoro di $f_1 = 900 \text{ MHz}$ e di $f_2 = 910 \text{ MHz}$, sia l'impedenza che la linea presenta al suo ingresso relativamente alle due frequenze.*

Si valuti la lunghezza d'onda della linea alle due frequenze:

$$\lambda_1 = c/f_1 = 300 \cdot 10^6 / 900 \cdot 10^6 = 0.33333,$$

$$\lambda_2 = c/f_2 = 300 \cdot 10^6 / 910 \cdot 10^6 = 0.32967.$$

La variazione della lunghezza d'onda risulta

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = -3.6 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

mentre

$$\delta_1 = \ell/\lambda_1 = 10/0.33333 = 30.0,$$

$$\delta_2 = \ell/\lambda_2 = 10/0.32967 = 30.\bar{3},$$

da cui

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = 0.3333 = 1/3.$$

Pertanto una variazione della frequenza di lavoro di soli 10 MHz comporta una variazione della lunghezza della linea pari ad un terzo della lunghezza d'onda λ_1 , rispetto alla quale si sarebbe dimensionato un eventuale dispositivo di adattamento. Inoltre l'impedenza che la linea presenta al suo ingresso alle due diverse frequenze di lavoro risulta:

$$Z_1 = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \tan(\beta_1 \ell)}{R_0 + jZ_u \tan(\beta_1 \ell)} = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \tan(2\pi\delta_1)}{R_0 + jZ_u \tan(2\pi\delta_1)} = 100 \Omega,$$

$$Z_2 = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \tan(\beta_2 \ell)}{R_0 + jZ_u \tan(\beta_2 \ell)} = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \tan(2\pi\delta_2)}{R_0 + jZ_u \tan(2\pi\delta_2)} = 30.77 + j19.98 \Omega.$$

□

Un ulteriore svantaggio della configurazione analizzata e' dato dal fatto che, non risultando il carico adattato alla linea, nella linea e' presente una certa stazionarieta'. Anche se la potenza attiva che fluisce attraverso la linea e' tutta quella che il generatore puo' fornire, a causa della presenza di un'onda diretta ed una riflessa in alcune sezioni della linea si misurera' un valore della tensione e della corrente maggiore rispetto al caso in cui e' presente la sola onda diretta. Tale situazione riduce la massima potenza trasferibile dal generatore al carico in quanto ad un piu' elevato valore di tensione e' associata una maggiore ampiezza del campo elettrico e quindi una maggiore probabilita' di superare la rigidita' dielettrica del mezzo interposto tra i conduttori (cioe' di superare l'ampiezza massima del campo elettrico

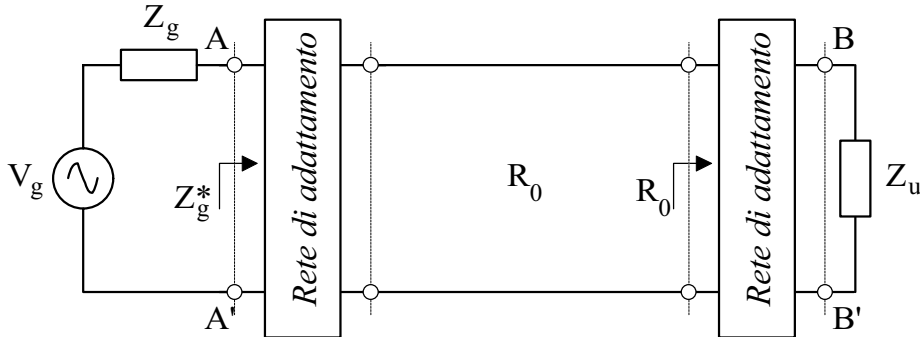


Figura 4.3: Posizionamento alternativo della rete di adattamento.

oltre la quale si ha una elevata probabilità di scarica elettrica nel mezzo). Inoltre, poiché le perdite per conducibilità nei conduttori della linea sono proporzionali al quadrato della corrente, sulla linea saranno presenti delle perdite maggiori rispetto al caso in cui nella linea sia presente la sola onda diretta.

Per superare tali limitazioni è possibile utilizzare una diversa configurazione di adattamento che coinvolge due reti di adattamento (Fig. 4.3). In particolare, una delle due reti è posizionata in prossimità del carico e ha il compito di adattare il carico alla linea mentre l'altra, con la funzione di adattare la linea al generatore, è posizionata in prossimità di quest'ultimo. Operando in tal modo non è presente onda riflessa lungo il tratto di linea compreso tra i due dispositivi di adattamento e sono perciò minimizzate le perdite nei conduttori e massimizzato il valore limite della potenza trasportabile dalla linea di trasmissione. Inoltre, in qualsiasi sezione la linea presenterà una impedenza equivalente pari alla propria impedenza caratteristica R_0 . Ciò assicura che all'ingresso del secondo dispositivo di adattamento si misurerà sempre la stessa impedenza R_0 qualunque sia la lunghezza della linea, lunghezza che quindi risulta ora del tutto arbitraria.

4.1 Adattamento tramite trasformatore in quarto d'onda

Il dispositivo permette di adattare un carico resistivo ad una linea priva di perdite tramite l'inserimento di uno spezzone di altra linea avente opportuna lunghezza ed impedenza caratteristica. Per non avere dissipazione di potenza tale spezzone di linea è costituito da un tratto di linea priva di perdite ed è quindi caratterizzato da una impedenza caratteristica R_1 reale ($R_1 \in \mathbb{R}^+$).

Si consideri ora il caso dell'adattamento di un carico Z_u ad una linea priva di perdite di impedenza caratteristica R_0 , che in seguito chiameremo linea principale. Nei paragrafi precedenti si era visto che una linea di impedenza caratteristica R_1 chiusa su un carico Z_u presenta, ad una distanza ℓ dal carico, una impedenza:

$$Z(\ell) = R_1 \frac{Z_u + jR_1 \tan(\beta_1 \ell)}{R_1 + jZ_u \tan(\beta_1 \ell)}, \quad (4.5)$$

dove $\beta_1 \in \mathbb{R}^+$ e' la costante di fase della linea di impedenza R_1 . Si puo' quindi pensare di dimensionare opportunamente la linea di impedenza R_1 in modo che questa presenti al suo ingresso una impedenza $Z(\ell) = R_0$, pari cioe' all'impedenza caratteristica della linea principale. Poiche' la linea principale e' supposta priva di perdite ($R_0 \in \mathbb{R}^+$) il secondo membro dell'eq. (4.5) deve risultare reale. Cio' si verifica se:

- $\tan(\beta \ell) = 0$

cioe' $\ell = n\lambda_1/2$ con $n = 0, 1, \dots$, dove $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1$ e' la lunghezza d'onda nel tratto di linea di impedenza R_1 . Da cio' deriva che per avere adattamento dovra' essere verificata la condizione $Z_u = R_0$. Tale soluzione non e' tuttavia utile ai fini dell'adattamento in quanto richiede che il carico sia gia' adattato alla linea. Essa esprime comunque una importante proprieta': l'inserimento di un tratto di linea, di impedenza R_1 arbitraria ma di lunghezza pari ad un multiplo della meta' della lunghezza d'onda misurata in essa, non altera il comportamento della linea principale qualsiasi sia il punto in cui essa e' inserita. Alcuni esempi di applicazione pratica di tale proprieta' saranno riportati piu' avanti.

- $\tan(\beta \ell) = \infty$

cioe' $\ell = \lambda_1/4 + n\lambda_1/2$ con $n = 0, 1, \dots$, dove $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1$ e' la lunghezza d'onda nel tratto di linea di impedenza R_1 . Da tale ipotesi deriva che per avere adattamento dovra' essere verificata la condizione

$$\frac{R_1^2}{Z_u} = R_0. \quad (4.6)$$

Si trattera' percio' di interporre tra il carico e la linea principale un tratto di una linea di trasmissione avente lunghezza $\lambda_1/4$ ed impedenza caratteristica $R_1 = \sqrt{R_0 Z_u} \in \mathbb{R}^+$. Si noti tuttavia che non e' possibile adattare direttamente un carico che presenta una impedenza complessa ($Z_u \in \mathbb{C}$) ma solo carichi di impedenza reale. Qualora l'impedenza del carico risulti

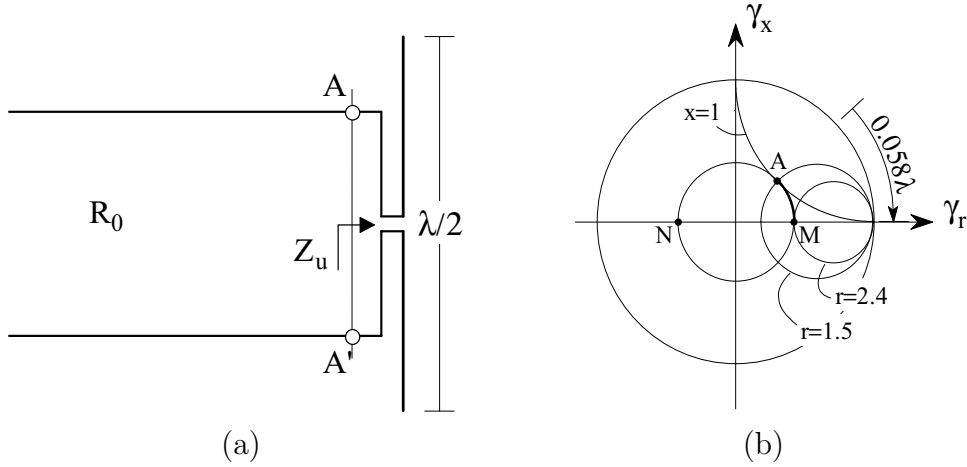


Figura 4.4: Geometria del problema relativa all'esercizio 4.2.

complessa e' necessario spostarsi opportunamente lungo la linea per individuare una sezione in cui l'impedenza risulta puramente reale e ivi applicare il trasformatore in quarto d'onda.

Esercizio 4.2 *Si adatti tramite un trasformatore in quarto d'onda un'antenna filare avente impedenza d'ingresso $Z_{in} = 75 + j50 \Omega$ ad una linea priva di perdite di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ (Fig 4.4a).*

Risultando il carico Z_u complesso e' necessario individuare sulla linea una sezione in cui si misura una impedenza puramente reale ove applicare il trasformatore in quarto d'onda. A tal fine si puo' convenientemente utilizzare la C.d.S. letta in termini di impedenza (Fig 4.4b). Su tale carta l'impedenza normalizzata del carico,

$$Z_{u_n} = \frac{Z_u}{R_0} = \frac{75 + j50}{50} = 1.5 + j,$$

individua un punto A intersezione delle circonferenze $r = 1.5$, $x = 1$. Per valutare la sezione in cui la linea presenta una impedenza puramente resistiva si dovra' ruotare in senso orario sulla circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante passante per il punto A fino ad incontrare la circonferenza a $x = 0$. Cio' avverra' nel punto M che individua sulla linea una sezione BB' posta a 0.058λ dal carico (Fig. 4.5). Per il punto M passa la circonferenza $r = r_{max} = 2.4$ che coincide con il valore del ROS . Denormalizzando si ottiene il valore del carico resistivo che la linea presenta alla sezione BB'

$$R'_u = ROS R_0 = 2.4 \cdot 50 = 120 \Omega.$$

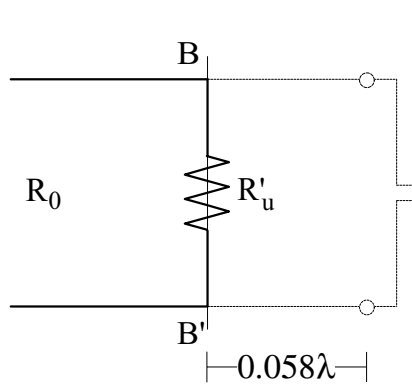


Figura 4.5: Circuito equivalente alla sez. BB' .

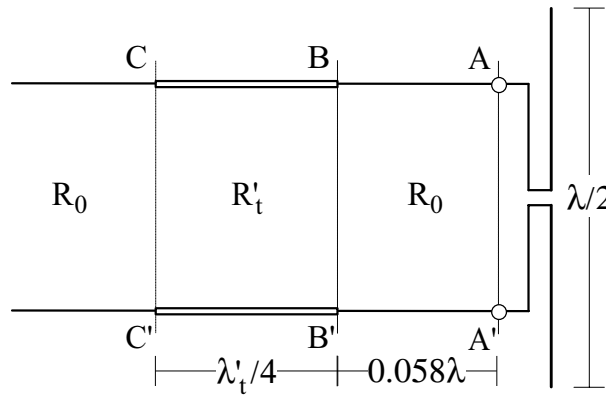


Figura 4.6: Possibile configurazione di adattamento tramite trasformatore in quarto d'onda.

E' quindi possibile inserire un tratto di linea di lunghezza $\lambda'_t/4$ (con λ'_t lunghezza d'onda nel tratto di linea con cui e' costruito il trasformatore) ed impedenza caratteristica

$$R'_t = \sqrt{R'_u R_0} = \sqrt{(R_0 ROS) R_0} = R_0 \sqrt{ROS} \simeq 77.5 \Omega,$$

come schematizzato in Fig. 4.6.

Oltre al punto M sarebbe possibile individuare sulla C.d.S. anche un punto N , caratteristico di una sezione DD' posta ad una distanza $\lambda/4$ dalla sezione BB' , in cui si misura una impedenza equivalente puramente reale. Tale punto corrisponde ad un minimo di tensione per cui l'impedenza

equivalente risulta

$$R_u'' = \frac{R_0}{ROS} = \frac{50}{2.4} \simeq 20.8 \Omega.$$

Per adattare il carico alla linea e' quindi possibile inserire, alla sezione DD' , un tratto di linea di lunghezza $\lambda_t''/4$ (con λ_t'' lunghezza d'onda nel tratto di linea con cui e' costruito il nuovo trasformatore) avente impedenza caratteristica

$$R_t'' = \sqrt{R_u'' R_0} = \sqrt{(R_0/ROS) R_0} = \frac{R_0}{\sqrt{ROS}} \simeq 32.3 \Omega.$$

Si noti come l'impedenza del trasformatore da porre nella sezione BB' , associata al punto M , risulti maggiore dell'impedenza caratteristica della linea principale mentre quella relativa al trasformatore da inserire nella sezione DD' , associata al punto N , risulti minore. Tale proprieta' e' generale e la scelta tra le due sezioni e' dettata da vantaggi costruttivi nella realizzazione del trasformatore. \square

4.2 Considerazioni sull'uso di un trasformatore in quarto d'onda

L'adattamento tramite trasformatore in quarto d'onda ha certamente lo svantaggio di richiedere la costruzione di linee di trasmissione di opportuna impedenza caratteristica. Tuttavia il problema maggiore risiede nel fatto che esso e' un dispositivo risonante, cioe' per funzionare correttamente la sua lunghezza deve essere pari a $\ell = \lambda/4$ (cioe' $\beta\ell = \pi/2$) e cio' si verifica alla sola frequenza di progetto. Si consideri ad esempio il caso dell'adattamento di un carico $R_u = 100 \Omega$ ad una linea $R_0 = 50 \Omega$ che impone una impedenza del trasformatore in quarto d'onda pari a $R_1 = \sqrt{R_u R_0} \simeq 70.7 \Omega$. In Fig. 4.7, in cui si riporta per il caso in esame l'andamento del modulo del coefficiente di riflessione al variare della frequenza, e' evidente come una piccola variazione dalla frequenza f_0 di progetto provochi un significativo incremento nell'ampiezza del coefficiente di riflessione. In generale si fissa un massimo valore ρ_m che puo' essere accettato relativamente allo specifico progetto e si definisce la banda di adattamento come la banda di frequenza entro la quale il modulo del coefficiente di riflessione e' minore di tale valore limite ρ_m .

Per allargare tale banda e' comunque possibile porre due o piu' trasformatori in quarto d'onda in cascata.

Si consideri ad esempio il caso di due trasformatori in quarto d'onda cosi' come schematizzato in Fig. 4.8. In questo caso l'impedenza alla sezione BB'

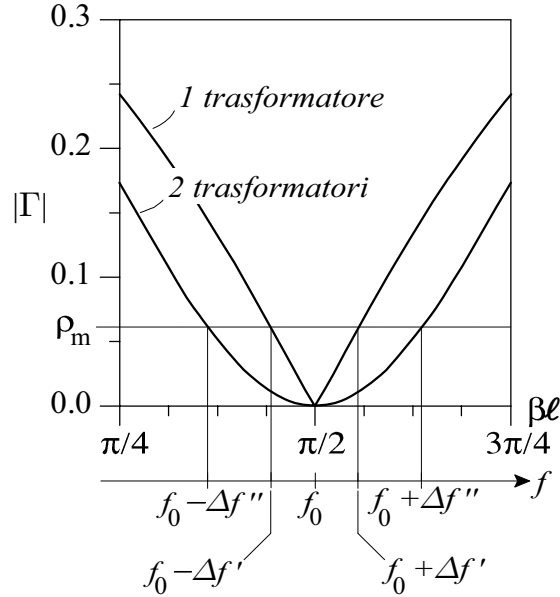


Figura 4.7: Modulo del coefficiente di riflessione al variare della frequenza.

dovra' risultare reale ma il suo valore e' del tutto arbitrario. Infatti con il primo dispositivo e' possibile trasformare il valore dell'impedenza del carico in una generica impedenza $R_{BB'}$ per poi riportarla al valore dell'impedenza caratteristica R_0 della linea principale con il secondo trasformatore. Una possibile scelta e' quella per cui $R_{BB'} = \sqrt{R_u R_0} = 70.7 \Omega$. In tal caso:

$$R_1 = \sqrt{R_u R_{BB'}} \simeq 84.1 \Omega, \quad (4.7)$$

$$R_2 = \sqrt{R_{BB'} R_0} \simeq 59.4 \Omega. \quad (4.8)$$

Con riferimento alla Fig. 4.7), si puo' notare come nel caso dell'esempio, con l'impiego di due trasformatori in quarto d'onda, la banda di frequenza per un prefissato ρ_m risulti praticamente raddoppiata.

4.3 Analisi di un trasformatore in quarto d'onda tramite riflessioni multiple

Si vuole ora studiare un trasformatore in quarto d'onda partendo da un diverso punto di vista. In particolare si analizzera', nel dominio del tempo, il comportamento di un'onda che si propaga lungo la linea principale, di impedenza caratteristica R_0 , ed incide sul trasformatore di impedenza Z_1 . Quando l'onda incontra per la prima volta la giunzione che la linea principale

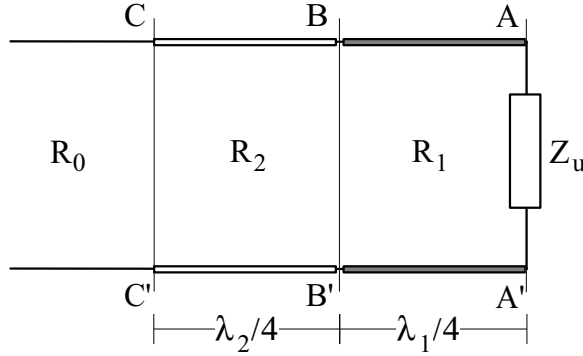


Figura 4.8: .

forma con il trasformatore essa verterà in parte riflessa verso il generatore ed in parte trasmessa nel tratto di linea che costituisce il trasformatore (Fig. 4.9). Poiché nel momento in cui tale onda incontra la giunzione non si è ancora propagata fino al carico Z_u , essa non potrà risentire del suo effetto e quindi sarà influenzata solo dalla linea di impedenza Z_1 . Ciò fa sì che il coefficiente di riflessione Γ_1 con cui l'onda è riflessa verso il generatore sia pari a

$$\Gamma_1 = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0}, \quad (4.9)$$

mentre il coefficiente di trasmissione τ_1 con cui l'onda è trasmessa nel tratto di linea di impedenza Z_1 risulterà:

$$\tau_1 = 1 + \Gamma_1 = \frac{2Z_1}{Z_1 + R_0}. \quad (4.10)$$

La parte dell'onda trasmessa nella linea costituente il trasformatore, dopo essersi propagata per un tratto pari a $\lambda_1/4$, viene riflessa dal carico secondo il coefficiente

$$\Gamma_u = \frac{Z_u - Z_1}{Z_u + Z_1}, \quad (4.11)$$

e quindi, percorrendo nuovamente un tratto di linea pari a $\lambda_1/4$, perviene alla giunzione linea principale/trasformatore. Ora, parte di quest'onda è riflessa nuovamente verso il carico, con coefficiente di riflessione

$$\Gamma_2 = \frac{R_0 - Z_1}{R_0 + Z_1} = -\Gamma_1, \quad (4.12)$$

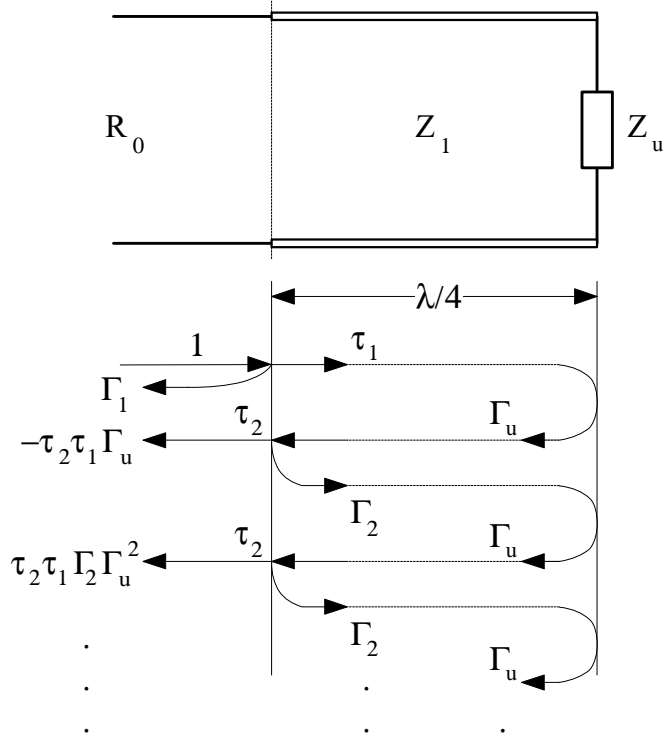


Figura 4.9: Riflessioni multiple in un trasformatore in quarto d'onda.

mentre parte e' trasmessa nella linea principale, con coefficiente di trasmissione

$$\tau_2 = 1 - \Gamma_1 = \frac{2R_0}{Z_1 + R_0}. \quad (4.13)$$

La parte di onda nuovamente riflessa verso il carico fa si' che il processo continui indefinitamente e si abbia un numero infinito di riflessioni tra la giunzione linea principale/trasformatore ed il carico. Il coefficiente di riflessione totale Γ , misurato alla giunzione linea principale–trasformatore, sara' quindi dato dal contributo di tutte le suddette infinite riflessioni. Poiche' l'onda nel propagarsi dalla giunzione al carico e dal carico alla giunzione percorre due volte un tratto di linea pari a $\lambda_1/4$ e subisce uno sfasamento pari a π , il coefficiente di riflessione totale puo' essere espresso come:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_1 - \tau_2\tau_1\Gamma_u + \tau_2\tau_1\Gamma_u\Gamma_2\Gamma_u - \tau_2\tau_1\Gamma_u(\Gamma_2\Gamma_u)^2 + \tau_2\tau_1\Gamma_u(\Gamma_2\Gamma_u)^3 - \dots \\ &= \Gamma_1 - \tau_2\tau_1\Gamma_u \sum_{n=0}^{\infty} (-\Gamma_2\Gamma_u)^n = \Gamma_1 - (1 - \Gamma_1^2)\Gamma_u \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1\Gamma_u)^n. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La serie che appare nell'eq. (4.14) e' una serie geometrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}, \quad \text{per } |s| < 1, \quad (4.15)$$

per cui essendo $|\Gamma_1\Gamma_u| < 1$ si ottiene:

$$\Gamma = \Gamma_1 - \frac{(1 - \Gamma_1^2)\Gamma_u}{1 - \Gamma_1\Gamma_u} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_u}{1 - \Gamma_1\Gamma_u}. \quad (4.16)$$

E' evidente che qualora il coefficiente di riflessione alla giunzione linea principale/trasformatore sia uguale a quello misurato sul carico il coefficiente di riflessione totale si annulla e si ha l'adattamento del carico alla linea principale. Esprimendo ora i coefficienti di riflessione in funzione delle impedenze caratteristiche delle linee e l'impedenza del carico si ha:

$$\Gamma = \frac{(Z_1 - R_0)(Z_u + Z_1) - (Z_1 + R_0)(Z_u - Z_1)}{(Z_1 + R_0)(Z_u + Z_1) - (Z_1 - R_0)(Z_u - Z_1)} = \frac{Z_1^2 - R_0Z_u}{Z_1^2 + R_0Z_u} = 0 \quad (4.17)$$

e cio' equivale a richiedere che $Z_1 = \sqrt{R_0Z_u}$.

L'effetto del trasformatore in quarto d'onda e' dunque quello di introdurre alla giunzione linea principale/trasformatore una onda riflessa uguale in ampiezza ma opposta in fase a quella dovuta al contributo di tutte le riflessioni multiple tra il carico e la linea principale. A regime, tutte le onde, che si propagano con la stessa velocita' di fase, si combinano in una singola onda viaggiante e quindi, nel tratto di linea costituente il trasformatore in quarto d'onda cosi' come nella linea principale, saranno presenti sia un'onda diretta che una riflessa, ma nella linea principale, per la particolare condizione imposta, quest'ultima avra' ampiezza nulla.

4.4 Adattamento tramite stub parallelo

Si vuole ora adattare il carico alla linea ponendo in parallelo alla linea uno stub, cioe' uno spezzone di cavo di opportuna lunghezza generalmente chiuso in corto circuito.

Si consideri il caso dell'adattamento di un carico Z_u ad una linea priva di perdite di impedenza caratteristica R_0 . Spostandosi dal carico verso il generatore l'ammettenza $Y(z)$ della linea variera' tra

$$G_0/(ROS) \leq |Y(z)| \leq G_0(ROS), \quad (4.18)$$

dove con $G_0 = 1/R_0$ si e' indicata la conduttanza caratteristica della linea.

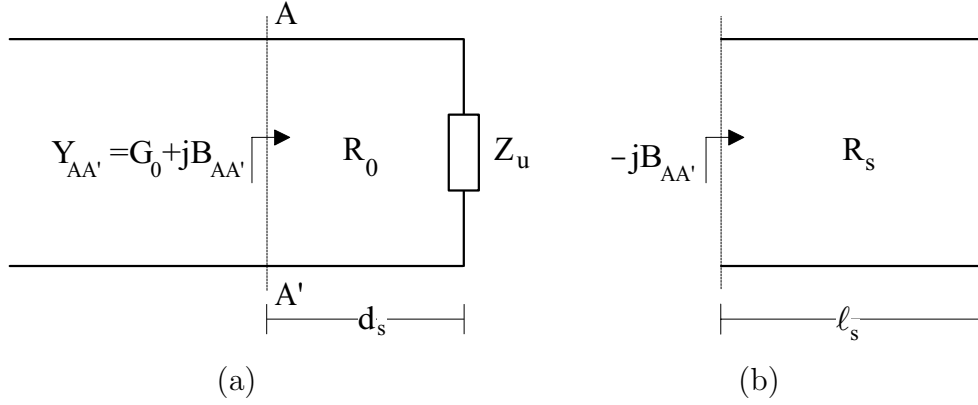


Figura 4.10: Adattamento tramite stub parallelo.

In particolare esisterà' almeno una sezione AA' (Fig. 4.10a) in cui la parte reale dell'ammettenza e' pari alla conduttanza caratteristica della linea, cioè':

$$Y_{AA'} = G_0 + jB_{AA'}. \quad (4.19)$$

Quindi per avere adattamento sarà' sufficiente inserire in parallelo alla linea alla sezione AA' un elemento reattivo che compensi la suscettanza $B_{AA'}$. Tale elemento reattivo può' essere realizzato con un tratto di linea, avente anche caratteristiche diverse rispetto alla linea principale, chiuso in corto circuito o in circuito aperto² (Fig 4.10b).

Al fine di valutare sia la posizione che le dimensioni dello stub si consideri dapprima il caso particolare in cui la linea principale risulta chiusa su un carico resistivo di ammettenza $G_u \in \mathbb{R}^+$. Per individuare la sezione AA' in cui inserire lo stub e' necessario risolvere l'equazione

$$Y_{BB'} = G_0 + jB_{AA'} = G_0 \frac{G_u + jG_0 \tan(\beta d_s)}{G_0 + jG_u \tan(\beta d_s)}. \quad (4.20)$$

Introducendo le quantità' normalizzate

$$g = G_u/G_0, \quad b = B_{AA'}/G_0, \quad (4.21)$$

la precedente espressione può' essere posta nella forma

$$(1 - bg \tan(\beta d_s)) + j(b + g \tan(\beta d_s)) = g + j \tan(\beta d_s), \quad (4.22)$$

²Anche se si era evidenziato nei precedenti paragrafi come un circuito aperto reale si discosti da quello ideale, alcune condizioni realizzative ne consigliano comunque l'impiego.

da cui, eguagliando separatamente la parte reale e quella immaginaria, si ottiene:

$$1 - bg \tan(\beta d_s) = g, \quad (4.23)$$

$$j(b + g \tan(\beta d_s)) = j \tan(\beta d_s). \quad (4.24)$$

Risolvendo l'eq. (4.24) in termini della suscettanza normalizzata b e facendo uso della eq. (4.23), si ottiene

$$\tan^2(\beta d_s) = 1/g, \quad (4.25)$$

da cui, essendo $\beta = 2\pi/\lambda$,

$$d_s = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \sqrt{1/g} = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \sqrt{G_0/G_u}. \quad (4.26)$$

Si noti che sono possibili due valori principali per la lunghezza d_s a secondo del segno della radice scelto. Quindi se d'_s e' una soluzione dell'eq. (4.26) anche $d''_s = \lambda/2 - d'_s$ sara' una soluzione principale e la soluzione generale risultera' $d_s = \pm d'_s \pm n\lambda/2$ con $n = 0, 1, 2, \dots$.

Sostituendo poi il risultato espresso dall'eq. (4.25) nella eq. (4.24) si puo' porre la suscettanza normalizzata b in funzione della sola conduttanza g tramite la relazione

$$b = (1 - g) \tan(\beta d_s) = \frac{1 - g}{\sqrt{g}} \quad (4.27)$$

Alla sez. AA' , posta a distanza d_s dal carico, sara' quindi necessario posizionare uno stub che presenti una suscettanza

$$jB_s = -j(G_0 - G_u) \sqrt{G_0/G_u} \quad (4.28)$$

che, nel caso si voglia realizzare lo stub con un tratto di linea di ammettenza caratteristica G_s chiusa in corto circuito, equivale a richiedere una lunghezza della linea pari a

$$\ell_s = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left(\frac{G_s}{G_0 b} \right) = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left(\frac{G_s}{G_0 - G_u} \sqrt{G_u/G_0} \right). \quad (4.29)$$

Nel caso in cui il carico presenti una ammettenza Y_u complessa e' sempre possibile individuare, analogamente a quanto gia' visto per un trasformatore in quarto d'onda, una sezione della linea in cui l'ammettenza risulta puramente reale e quindi procedere come descritto sopra riferendo l'origine dell'asse z a tale sezione.

In particolare una tale sezione potrà essere certamente localizzata in corrispondenza di un minimo di tensione in cui l'ammettenza normalizzata risulta

$$g = \frac{1 + |\Gamma(z)|}{1 - |\Gamma(z)|} = ROS. \quad (4.30)$$

Sostituendo tale risultato nelle relazioni (4.26) e (4.29) si ottiene che per adattare il carico alla linea sarà sufficiente posizionare, a distanza

$$d'_s = \frac{\lambda}{4\pi} \arccos \sqrt{\frac{ROS - 1}{ROS + 1}} \quad (4.31)$$

dalla sezione in cui si è misurato il minimo di tensione, uno stub chiuso in corto circuito avente lunghezza

$$\ell'_s = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left(\frac{G_s}{G_0} \frac{\sqrt{ROS}}{ROS - 1} \right). \quad (4.32)$$

Nel caso si voglia invece far uso della C.d.S., letta in termini di ammettenza, sarà necessario muoversi in senso orario sulla circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante, individuata dall'ammettenza normalizzata del carico, fino ad intersecare la circonferenza $g = 1$. Tale punto individua sia la sezione AA' a cui porre lo stub sia il valore di suscettanza normalizzata (rispetto alla linea principale) che questo dovrà presentare, così come descritto nel seguente esercizio.

Esercizio 4.3 *Si adatti un carico di impedenza $Z_u = 150 + j50 \Omega$ ad una linea priva di perdite di impedenza $R_0 = 100 \Omega$ tramite uno stub parallelo realizzato con un tratto di linea di impedenza caratteristica $R_s = 3R_0 \Omega$.*

Poiché si vuole utilizzare la C.d.S. letta in termini di ammettenza, come primo passo si valuta l'ammettenza normalizzata del carico,

$$Y_{u_n} = \frac{R_0}{Z_u} = \frac{100}{150 + j50} = 0.6 - j0.2,$$

e si individua su di essa il punto P , intersezione dei cerchi a $g = 0.6$ e $b = -0.2$ (Fig. 4.11a). Tale punto P individua una circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante che interseca nel punto A la circonferenza a $g = 1$. Dalla C.d.S. è evidente che ad una distanza $d_s = 0.194 \lambda$ dal carico si può individuare una sezione AA' in cui l'ammettenza della linea principale chiusa sul carico Z_u risulta:

$$Y_{AA'} = \frac{Y_{AA'_n}}{R_0} = \frac{1 + j0.58}{R_0} = G_0 + j0.58/R_0 \Omega.$$

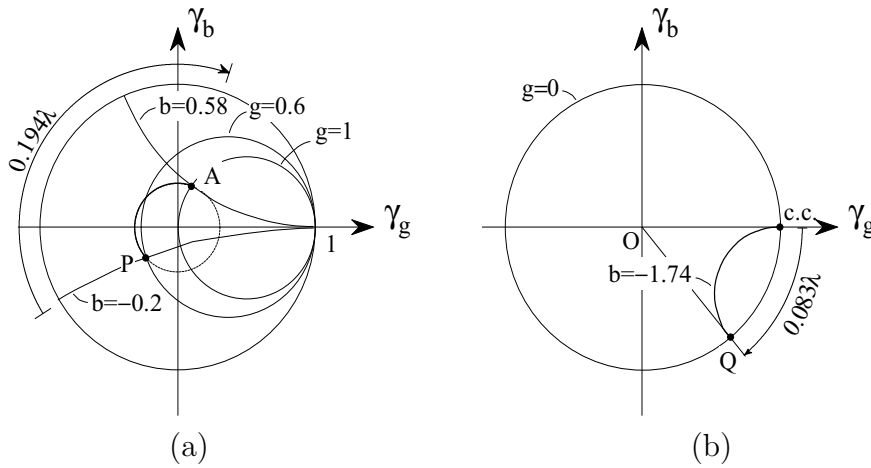


Figura 4.11: Carta di Smith relativa all'esercizio 4.3.

Sarà quindi sufficiente porre a tale sezione un elemento reattivo che realizzi una suscettanza $B_s = -j0.58/R_0$. In particolare si sceglie di realizzare tale elemento reattivo con un tratto di linea chiusa in corto circuito che, per i dati del problema, presenta una impedenza caratteristica $R_s = 3R_0\Omega$. Volendo ancora utilizzare la C.d.S., è necessario normalizzare la suscettanza B_s rispetto alla conduttanza caratteristica G_s del tratto di linea con cui si costruisce lo stub, cioè

$$b_s = \frac{B_s}{G_s} = \frac{-0.58/R_0}{1/(3R_0)} = -1.74,$$

ed individuare la circonferenza a suscettanza costante $b_s = b = -1.74$ (Fig. 4.11b). Muovendosi ora in senso orario sulla circonferenza a $|\Gamma_I| = 1$ dal punto di corto circuito al punto Q (intesezione delle circonferenze $b = -1.74$ e $g = 0$) si percorre una distanza $\ell_s = 0.083\lambda_s$ che corrisponde alla lunghezza che lo stub in corto circuito deve avere al fine di presentare al suo ingresso la richiesta suscettanza B_s . \square

Esercizio 4.4 Per il circuito descritto in Fig. 4.12 si determini la distanza d_1 dal carico alla quale posizionare uno stub in corto circuito, costituito da un tratto di linea di impedenza caratteristica $R_s = 2R_0$, e la sua lunghezza ℓ_1 tali da adattare il carico alla linea; la lunghezza ℓ_2 di un analogo stub posizionato alla sezione BB' e l'impedenza R_1 del trasformatore in quarto d'onda interposto tra il generatore e la linea tali da attuare il massimo trasferimento di potenza tra il generatore e la linea. Si determini inoltre la potenza dissipata sul carico Z_u in funzione della massima potenza trasferibile nel caso in cui

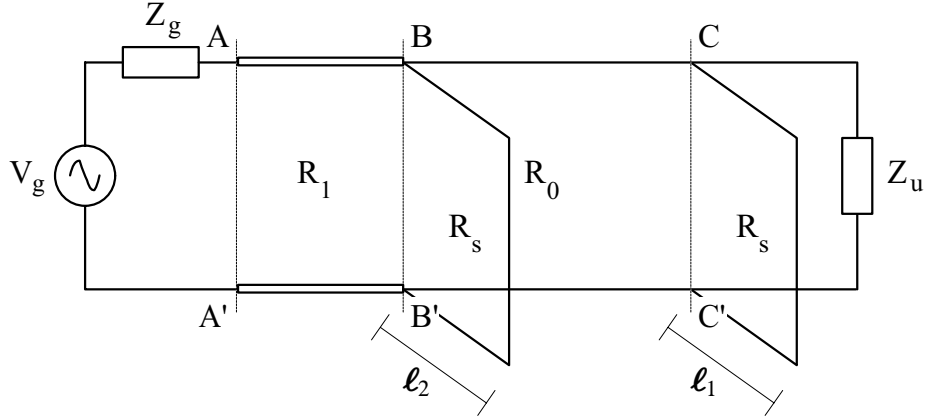


Figura 4.12: Geometria del problema relativa all'esercizio 4.4.

la lunghezza ℓ del trasformatore in quarto d'onda posto alla sezione BB' sia dimezzata. ($Z_u = 50 + j50 \Omega$, $R_0 = 50 \Omega$, $Z_g = 100 + j100 \Omega$)

Si adatti in primo luogo il carico Z_u alla linea. L'impedenza normalizzata del carico,

$$Z_{un} = \frac{Z_u}{R_0} = \frac{50 + j50}{50} = 1 + j,$$

individua sulla C.d.S. un punto P intersezione delle circonferenze a $r = 1$ e $x = 1$. Si individui ora il punto Q , simmetrico del punto P rispetto all'origine, e si legga la C.d.S. in termini di ammettenza. In tale punto Q , caratteristico dell'ammettenza normalizzata del carico, si intersecano le circonferenze $g = 0.5$, $b = -0.5$. E' ora necessario muoversi sulla circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante individuata dal punto Q in senso orario fino ad incontrare la circonferenza a $g = 1$ nel punto C , coincidente con il punto P . Cio' equivale a spostarsi alla sezione CC' posta ad una distanza $d_1 = \lambda/4$ dal carico. Poiche' a tale sezione CC' si misura una ammettenza

$$Y_{CC'} = Y_{CC'n} G_0 = \frac{1 + j}{R_0} = \frac{1}{R_0} + j \frac{1}{R_0},$$

per realizzare l'adattamento sara' necessario inserire in parallelo alla linea principale uno stub in corto circuito che al suo ingresso presenti una suscettanza

$$B'_s = -\text{Im}[Y_{CC'}] = -\frac{1}{R_0} = -0.02 \Omega^{-1}.$$

Volendo realizzare lo stub con un tratto di linea in corto circuito avente impedenza caratteristica $R_s = 2R_0$, il valore di suscettanza normalizzata che

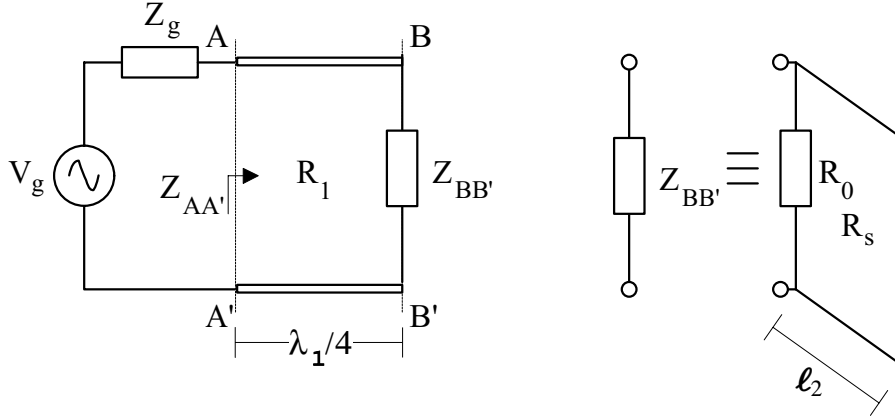


Figura 4.13: Circuito equivalente.

lo stub deve realizzare al suo ingresso sara'

$$b'_s = \frac{B_s}{1/R_s} = \frac{-1/R_0}{1/(2R_0)} = -2.$$

Dalla C.d.S. e' evidente che per realizzare tale valore di suscettanza normalizzata lo stub deve risultare lungo $\ell_1 = 0.074 \lambda_s$, dove con λ_s si e' indicata la lunghezza d'onda della linea con cui e' costruito lo stub. Il carico cosi' adattato si presentera' alla sezione BB' come una impedenza pari all'impedenza caratteristica della linea principale R_0 . Il problema si riduce quindi ad agire sul trasformatore in quarto d'onda e sul secondo stub in modo tale che l'impedenza R_0 si presenti equivalentemente alla sezione AA' come un carico $Z_{AA'}$ di impedenza pari al coniugato dell'impedenza interna Z_g del generatore (Fig. 4.13).

Supponendo che all'ingresso del trasformatore in quarto d'onda sia presente una impedenza $Z_{BB'}$ questa sara' trasformata alla sezione AA' in una impedenza

$$Z_{AA'} = \frac{R_1^2}{Z_{BB'}} = R_1^2 Y_{BB'}.$$

Se si indica con

$$Y_{BB'} = \frac{1}{R_0} + jB'_s$$

l'ammettenza costituita dal parallelo tra lo stub di lunghezza ℓ_2 e l'impedenza R_0 , per avere il massimo trasferimento di potenza sara' sufficiente imporre

che

$$Z_g^* = R_1^2 \left[\frac{1}{R_0} + jB_s'' \right].$$

Eguagliando la parte reale e quella immaginaria cio' equivale a richiedere:

$$\mathcal{R}e \{ Z_g^* \} = \frac{R_1^2}{R_0},$$

$$\mathcal{I}m \{ Z_g^* \} = R_1^2 B_s''.$$

Inserendo i dati del problema si ricava: $R_1 = 50\sqrt{2}\Omega$, $B_s'' = -0.02\Omega^{-1}$. Si noti che il valore della suscettanza che il secondo stub deve presentare e' identico a quello precedentemente richiesto per il primo stub, per cui se ne deduce che anche in questo caso la lunghezza dello stub sara' pari a $\ell_2 = 0.074\lambda_s$.

Si consideri ora il caso in cui per i valori la lunghezza del trasformatore in quarto d'onda risulti dimezzata ($\ell = \lambda_1/8$). Avendo indicato con $Y_{BB'}$ l'ammettenza al suo ingresso e tenendo in conto che

$$\beta_1 \ell = \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{\lambda_1}{8} = \pi/4,$$

alla sezione AA' si misurera' una impedenza

$$Z_{AA'} = Z(\lambda_1/8) = R_1 \frac{Z_{BB'} + jR_1}{R_1 + jZ_{BB'}} = R_1 \frac{1 + jR_1 Y_{BB'}}{R_1 Y_{BB'} + j} = R_0(0.510 - j0.542).$$

Poiche' tutte le linee sono supposte prive di perdite la potenza attiva P_a che fluisce attraverso la sezione AA' e' la stessa che si dissipa sul carico Z_u , quindi

$$P_a = \frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{|Z_g + Z_{AA'}|^2} \mathcal{R}e [Z_{AA'}] = \frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{R_0} 0.0605.$$

Risultando poi la massima potenza trasferibile P_{max} al carico

$$P_{max} = \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{\mathcal{R}e [Z_g]},$$

si ha

$$P_a = 0.484 P_{max}.$$

□

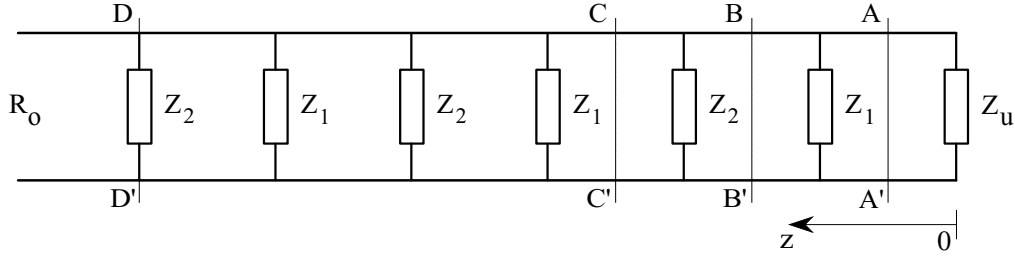


Figura 4.14: Geometria del problema relativa all'esercizio 4.5.

Esercizio 4.5 *Su una linea sono poste, a distanza $\lambda/4$ tra loro, una serie di resistenze così come schematizzato in Fig. 4.14. I tratti di linea che le collegano hanno tutti impedenza caratteristica pari a $R_0 = 200 \Omega$. Si determini il valore del rapporto d'onda stazionario nelle sezioni AA', BB', CC' e la distanza ℓ , misurata in termini di lunghezze d'onda a partire dalla sezione DD', a cui porre uno stub parallelo che permetta di adattare l'insieme dei carichi alla linea ($Z_1 = 1/50 \Omega$, $Z_2 = 50 \Omega$, $Z_u = Z_2$).*

Si consideri il carico Z_u a destra della sezione AA'. Su di esso si misurerà un coefficiente di riflessione di tensione pari a

$$\Gamma(0) = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0} = \frac{50 - 200}{50 + 200} = -\frac{3}{5},$$

per cui, supponendo la linea priva di perdite e quindi il modulo del coefficiente di riflessione costante lungo di essa, il rapporto d'onda stazionario nella sezione AA' risulterà

$$(ROS)_{AA'} = \frac{1 + |\Gamma(0)|}{1 - |\Gamma(0)|} = 4.$$

Si noti ora che il tratto di linea che separa il carico Z_u dalla prima impedenza Z_1 a sinistra di AA' è pari a $\lambda/4$. Ciò fa sì che tale tratto agisca come un trasformatore in quarto d'onda, quindi

$$Z(\lambda/4 - \eta) = \frac{R_0^2}{Z_u} = 800 \Omega,$$

con $\eta \ll 1$. L'insieme impedenza Z_1 , linea, carico Z_u si presenterà perciò equivalentemente come l'impedenza risultante dal parallelo dell'impedenza Z_1 con l'impedenza $Z(\lambda/4 - \eta)$, cioè

$$Z(\lambda/4 + \eta) = \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z(\lambda/4 - \eta)} \right]^{-1} = \frac{1}{50 + 800^{-1}} \simeq \frac{1}{50},$$

mentre il coefficiente di riflessione risulterà

$$\Gamma(\lambda/4 + \eta) = \frac{Z(\lambda/4 + \eta) - R_0}{Z(\lambda/4 + \eta) + R_0} = \frac{50^{-1} - 200}{50^{-1} + 200} \simeq 1.$$

Poiche' il modulo del coefficiente di riflessione e' pressoché unitario, alla sezione BB' si misurerà un rapporto d'onda stazionario

$$(ROS)_{BB'} \rightarrow \infty.$$

Considerando che anche il tratto di linea tra BB' e CC' agisce come un trasformatore in quarto d'onda, si avrà

$$Z(\lambda/2 - \eta) = \frac{R_0^2}{Z(\lambda/4 + \eta)} \simeq 2 M\Omega.$$

Poiche' quest'ultima impedenza e' molto maggiore dell'impedenza Z_2 posta a sinistra della sezione BB' , il loro parallelo presenterà un valore pari all'impedenza Z_2 stessa

$$Z(\lambda/2 + \eta) = \left[\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z(\lambda/2 - \eta)} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{50} + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \right]^{-1} \simeq 50.$$

Quindi il coefficiente di riflessione, così come il rapporto d'onda stazionario, alla sezione CC' risulterà uguale a quello misurato alla sezione AA' .

Con ragionamenti del tutto analoghi e' possibile dimostrare che nella sezione DD' si misurerà una impedenza

$$Z_{DD'} = Z(3\lambda/2 + \eta) \simeq 50.$$

Per adattare un carico puramente resistivo ad una linea caratterizzata da un'impedenza caratteristica $R_0 = 200 \Omega$ tramite uno stub parallelo si dovrà porre lo stub parallelo ad una distanza ℓ a sinistra della sezione DD' tale che l'insieme carico–linea presenti per tale distanza una conduttanza $G_0 = 1/R_0$. Si dovrà quindi verificare la condizione

$$\mathcal{R}e\{Y_{DD'}\} = \mathcal{R}e\left\{G_0 \frac{Y_{DD'} + j G_0 \tan(\beta\ell)}{G_0 + j Y_{DD'} \tan(\beta\ell)}\right\} = G_0,$$

cioè

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{Y_{DD'} + j G_0 \tan(\beta\ell)}{G_0 + j Y_{DD'} \tan(\beta\ell)}\right\} = 1.$$

Cio' e' assicurato per

$$\tan(\beta\ell) = \frac{G_0}{Y_{DD'}}, \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{\arctan(G_0/Y_{DD'})}{2\pi} \lambda \simeq 0.039 \lambda.$$

□

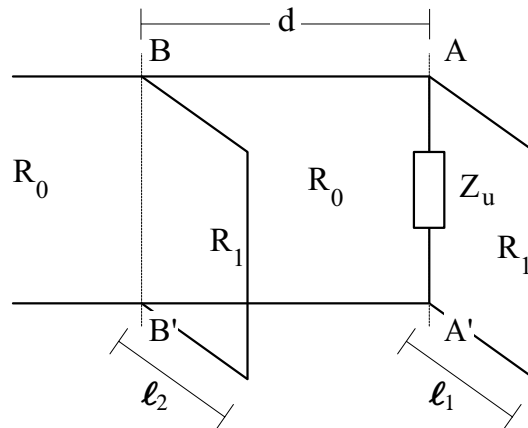


Figura 4.15: Adattamento tramite doppio stub.

4.5 Adattamento tramite doppio stub

Sarà ora nostro obiettivo quello di esaminare un dispositivo che sia in grado di adattare carichi di impedenza diversa variando in modo meccanico la posizione di alcune parti componenti.

Nel caso di un singolo stub sarebbe necessario variare con continuità sia la lunghezza dello stub che la posizione dello stesso lungo la linea. Mentre per modificare la lunghezza dello stub si può impiegare un cortocircuito la cui posizione può essere variata agendo su una vite micrometrica, modificare la posizione dello stub lungo la linea non risulta sempre semplice. Per ovviare a tale inconveniente si preferisce impiegare un dispositivo denominato doppio stub costituito da due stub posti ad una prefissata distanza d l'uno dall'altro (tipicamente $d = \lambda/8$, $d = 3\lambda/8$, $d = 5\lambda/8$).

Per comprendere il funzionamento del dispositivo si consideri la configurazione descritta in figura in cui i due stub sono posti a distanza $d = 3\lambda/8$. Ciascuno dei due tratti di linea chiusa in corto circuito con cui sono realizzati gli stub costituiscono una reattanza in parallelo alla linea il cui valore è determinato dalla lunghezza del tratto. Quindi agire sulla lunghezza degli stub equivale ad agire sulla parte immaginaria della ammettenza che la linea presenta alle sezioni AA' e BB' .

Si utilizzi ancora una volta la C.d.S. letta in termini di ammettenza e si analizzi la situazione alla sezione AA' . Il parallelo carico-stub individuerà sulla C.d.S. un generico punto A_1 . Spostandosi dalla sezione AA' alla BB' si percorrerà sulla linea una distanza pari a $d = 3\lambda/8$ il che equivale a ruotare il punto A_1 sulla C.d.S. di 270° in senso orario individuando così il punto B_1 . Si supponga ora di essere per caso pervenuti sulla circonferenza $g = 1$.

Se si realizza tale ipotesi si può operare analogamente a quanto fatto nel caso di adattamento tramite singolo stub e dimensionare opportunamente lo stub afferente alla sezione BB' in modo da non avere onda riflessa verso il generatore. Si disegni ora sulla C.d.S. una circonferenza avente raggio uguale a quello della circonferenza a $g = 1$ ma centro ruotato di 270° in senso antiorario. Tale circonferenza rappresenterà tutti i valori di impedenza normalizzata che nello spostarsi dalla sezione AA' alla sezione BB' appartengono alla circonferenza $g = 1$ e potranno quindi essere adattati dimensionando opportunamente lo stub alla sezione BB' . Il compito dello stub alla sezione AA' sarà quindi quello di modificare la suscettanza normalizzata del carico in modo da pervenire sulla circonferenza ruotata di 270° .

Esercizio 4.6 *Si adatti un carico $Z_u = 100 + j100 \Omega$ ad una linea avente impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ tramite due stub in corto circuito di impedenza caratteristica $R_1 = 100 \Omega$ distanziati tra loro di $3\lambda/8$.*

L'ammettenza normalizzata del carico risulta

$$Y_{u_n} = \frac{R_0}{Z_u} = \frac{50}{100 + j100} = \frac{1 - j}{4} \quad (4.33)$$

che, sulla C.d.S. letta in termini di ammettenza, individua il punto A_0 intersezione delle circonferenze a $g = 0.25$ e $b = -0.25$. Modificando la lunghezza dello stub posto alla sezione AA' si varia la parte immaginaria dell'ammettenza normalizzata del carico muovendo così il punto A_0 sulla circonferenza a $g = 0.25$. È possibile perciò spostarsi sulla circonferenza a $g = 0.25$ fino ad intersecare nel punto A_1 ($Y_{AA'_n} = 0.25 - j0.34$) la circonferenza a $g = 1$ ruotata in senso antiorario di 270° . Ciò equivale ad inserire in parallelo al carico una suscettanza normalizzata pari a $b_{s_a} = (-0.34) - (-0.25) = -0.09$ e quindi una suscettanza

$$B_{s_a} = \frac{b_{s_a}}{R_0} = \frac{-0.09}{50} = -1.8 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}.$$

Volendo realizzare tale suscettanza con un tratto di linea di impedenza caratteristica $R_1 = 100 \Omega$ è necessario prima normalizzare il valore di suscettanza rispetto a tale impedenza

$$b_{s_a} = B_{s_a} R_1 = -0.18.$$

quindi spostarsi sulla C.d.S. dal punto di corto circuito fino ad intersecare la circonferenza $b = -0.18$ che equivale ad una lunghezza dello stub pari a $\ell_{s_a} = 0.22 \lambda_1$. Ora spostandosi dalla sezione AA' alla sezione BB' , il punto

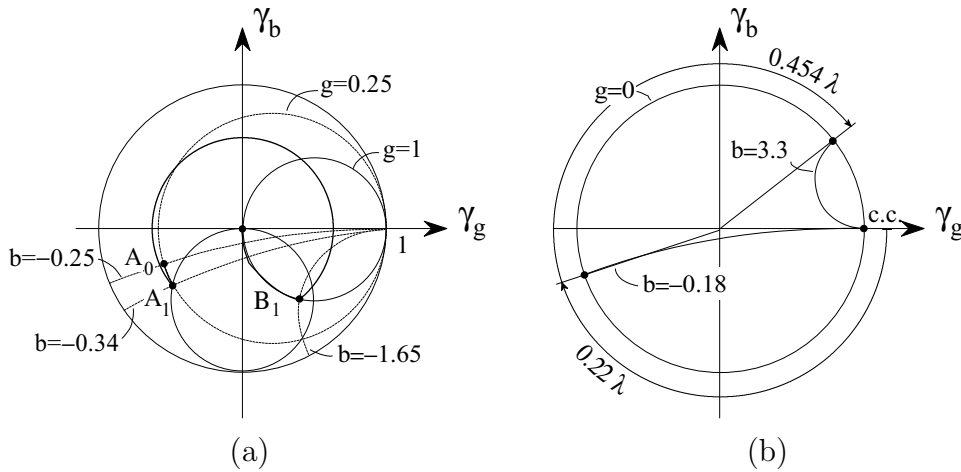


Figura 4.16: Carta di Smith relativa all'esercizio 4.6.

A_1 percorrerà tre quarti della C.d.S. sul cerchio a modulo del coefficiente di riflessione costante fino ad individuare, nel punto B_1 , una impedenza normalizzata

$$Y_{BB'_1} = 1 - j1.65.$$

Per ottenere l'adattamento sarà sufficiente fare in modo che lo stub posto alla sezione BB' compensi la parte immaginaria di tale impedenza. A tal fine lo stub dovrà presentare al suo ingresso una suscettanza

$$B_{s_b} = \frac{1.65}{R_0} = \frac{1.65}{50} = 0.033 \Omega^{-1}.$$

Per determinare la lunghezza di tale stub, analogamente a quanto operato per lo stub alla sezione AA' , sarà necessario normalizzare il valore della suscettanza B_{s_b} rispetto all'impedenza caratteristica $R_1 = 100 \Omega$ della linea in corto circuito con cui si realizza lo stub,

$$b_{s_b} = B_{s_b} R_1 = 3.3,$$

e spostarsi sulla C.d.S dal punto di corto circuito fino ad intersecare la circonferenza $b = 3.3$. Ciò equivale a realizzare uno stub di lunghezza $\ell_{s_b} = 0.454 \lambda_1$. \square

Si noti che non tutti i valori di ammettenza del carico possono essere adattati tramite un doppio stub. In particolare ciò non sarà possibile per tutti quei valori dell'ammettenza normalizzata del carico che individuano sulla

C.d.S. un punto interno alla circonferenza a conduttanza costante tangente alla circonferenza $g = 1$ ruotata della distanza d che intercorre tra gli stub (ad esempio per $d = 3\lambda/8$ tale circonferenza risulta essere $g = 2$). Infatti tali punti individuano circonferenze a conduttanza costante che non intersecano la circonferenza $g = 1$. La zona di non adattabilità così individuata potrebbe essere ridotta aumentando la distanza che intercorre tra gli stub fino a renderla prossima ad una lunghezza d'onda; tuttavia così facendo si andrebbe a lavorare in zone caratterizzate da una elevata sensibilità alle tolleranze costruttive ed una piccola variazione delle lunghezze calcolate comprometterebbe significativamente l'adattamento. Si preferisce perciò interporre tra il carico ed il dispositivo un tratto della stessa linea avente lunghezza $\lambda/4$. Alternativamente si può costruire un triplo stub ponendo sulla linea tre stub a distanza d l'uno dall'altro.