

# Capitolo 2

## Linee con perdite

In una linea di trasmissione reale la non perfetta conducibilita' dei conduttori e le perdite di volume (cioe' le perdite dovute alla isteresi dielettrica e alla conducibilita' del dielettrico in cui i conduttori sono immersi) fanno si' che una parte dell'energia elettromagnetica che si propaga nella linea sia dissipata sotto forma di calore. Per i materiali comunemente impiegati nella costruzione, e per frequenze non troppo elevate, tali perdite risultano molto piccole cosi' che il loro effetto puo' essere generalmente trascurato se la linea di trasmissione non risulta troppo lunga oppure non e' impiegata per realizzare un risonatore. In caso contrario e' necessario considerare un valore piccolo ma non nullo sia della resistenza  $R$  che della conduttanza  $G$  per unita' di lunghezza introdotte nel precedente capitolo.

### 2.1 Valutazione della conduttanza e della resistenza per unita' di lunghezza di una linea

Dal teorema di Poynting la potenza dissipata per isteresi dielettrica in un volume  $V$  di materiale, corrispondente ad un tratto di linea di lunghezza  $\Delta z$ , risulta

$$P_\varepsilon = \frac{\omega}{2} \int_V \varepsilon_2 |\vec{E}|^2 dV, \quad (2.1)$$

dove con  $\varepsilon_2$  si e' indicata la parte immaginaria della costante dielettrica  $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$  del materiale. La potenza dissipata nello stesso volume a causa di una conducibilita'  $\sigma$  risulta invece

$$P_\sigma = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV. \quad (2.2)$$

Definendo l'angolo di perdita  $\gamma$  come

$$\tan(\gamma) = \frac{\varepsilon_2 + \sigma/\omega}{\varepsilon_1}, \quad (2.3)$$

la potenza dissipata per unita' di lunghezza nel materiale che separa i conduttori della linea risulta:

$$\begin{aligned} P_v &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_\varepsilon + P_\sigma}{\Delta z} = \\ &= \frac{\omega\varepsilon_1 \tan(\gamma)}{2\Delta z} \int_S \int_0^{\Delta z} |\vec{E}|^2 dS dz = \frac{\omega\varepsilon_1 \tan(\gamma)}{2} \int_S |\vec{E}|^2 dS, \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove  $S$  e' la superficie trasversa della linea.

Dalla teoria dei circuiti elettrici  $P_v = G|V|^2/2$ , quindi la conduttanza per unita' di lunghezza della linea puo' essere espressa come:

$$G = \frac{\omega\varepsilon_1 \tan(\gamma)}{|V|^2} \int_S |\vec{E}|^2 dS. \quad (2.5)$$

Per quanto riguarda il calcolo della potenza dissipata nei conduttori della linea e' da notare che per la non perfetta conducibilita' di quest'ultimi e' presente un campo elettromagnetico non nullo anche all'interno di essi. Per risolvere il problema della propagazione nella struttura e' quindi necessario risolvere le equazioni di Maxwell sia nel mezzo dielettrico che nei conduttori ed imporre la continuita' dei campi tangenziali all'interfaccia. Tuttavia i materiali comunemente utilizzati nella realizzazione delle strutture guidanti, come rame, ottone e alluminio, possono essere considerati buoni conduttori anche alle frequenze delle microonde cosi' che e' possibile tener conto della propagazione del campo al loro interno attraverso una condizione al contorno approssimata, comunemente detta condizione di impedenza o condizione di Lentovich, che lega tra loro il campo elettrico a quello magnetico presenti all'interfaccia mezzo dielettrico/conduttore:

$$\vec{E} \times \hat{n} = Z_s \hat{n} \times \vec{H} \times \hat{n}, \quad (2.6)$$

dove  $\hat{n}$  e' la normale esterna alla superficie dei conduttori. Tale condizione permette di limitare l'osservazione del campo alla sola regione esterna ai conduttori. In tali ipotesi, poiche' la componente di campo elettrico tangente al conduttore non e' piu' identicamente nulla, si avra' un flusso di potenza reale attraverso le pareti della struttura guidante che si trasformerà in calore per effetto Joule. In tali ipotesi la potenza media attiva dissipata per unita' di lunghezza nelle pareti della linea a causa della conducibilita' finita risulta

$$P_c = \frac{1}{2} R_s \oint_{C_1+C_2} |\hat{n} \times \vec{H}|^2 dl, \quad (2.7)$$

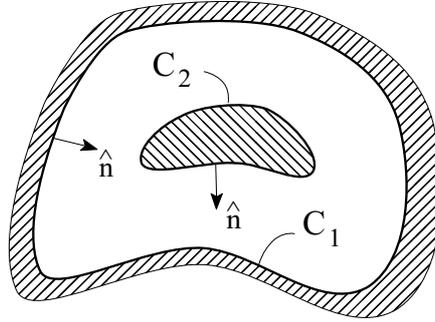


Figura 2.1: Sezione trasversale di una generica linea di trasmissione.

dove  $R_s = 1/\sigma\delta$  e' la resistenza superficiale dei conduttori della linea,  $\delta = \sqrt{2/(\mu\omega\sigma)}$  la profondita' di penetrazione, mentre  $C_1 + C_2$  rappresenta il contorno dei conduttori nella sezione trasversale.

Dalla teoria dei circuiti elettrici  $P_c = R|I|^2/2$ , la resistenza per unita' di lunghezza della linea puo' essere scritta come:

$$R = \frac{R_s}{|I|^2} \oint_{C_1+C_2} \left| \hat{n} \times \vec{H} \right|^2 dl. \quad (2.8)$$

A rigore sarebbe necessario considerare il campo magnetico soluzione del problema della propagazione in una guida d'onda reale soggetta alla condizione di Leontovich; tuttavia poiche' nelle situazioni applicative i conduttori risultano sempre dei buoni conduttori e' lecito approssimare il campo magnetico all'interfaccia con quello che si misurerebbe in una linea ideale costituita da conduttori elettrici perfetti.

**Esercizio 2.1** *Si determinino le espressioni delle costanti primarie di un cavo coassiale.*

L'andamento del campo elettromagnetico all'interno di un cavo coassiale con pareti perfettamente conduttrici e' descritto dalle relazioni

$$\vec{E} = \frac{V}{\rho \ln(b/a)} \hat{\rho},$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi},$$

dove  $a < \rho < b$ .

L'energia magnetica  $W_m$  immagazzinata nella linea per unita' di lunghezza e' legata all'induttanza  $L$  per unita' di lunghezza dalla relazione  $W_m = L|I|^2/4$  per cui

$$L = \frac{4W_m}{|I|^2} = \frac{\mu}{|I|^2} \int_S |\vec{H}|^2 dS = \frac{\mu}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\phi d\rho = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a).$$

L'energia elettrica  $W_e$  immagazzinata nella linea per unita' di lunghezza e' invece legata alla capacita'  $C$  per unita' di lunghezza dalla relazione  $W_e = C|V|^2/4$ , da cui segue

$$C = \frac{4W_e}{|V|^2} = \frac{\varepsilon_1}{|V|^2} \int_S |\vec{E}|^2 dS = \frac{\varepsilon_1}{\ln^2(b/a)} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\phi d\rho = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\ln(b/a)}.$$

Per valutare la conduttanza  $G$  per unita' di lunghezza e' possibile utilizzare la relazione (2.5) e sfruttare l'espressione precedentemente ricavata per il calcolo della capacita'  $C$  per unita' di lunghezza

$$G = \frac{\omega\varepsilon_1 \tan(\gamma)}{|V|^2} \int_S |\vec{E}|^2 dS = 2\pi f \tan(\gamma) C = \frac{4\pi^2 f \varepsilon_1 \tan(\gamma)}{\ln(b/a)}.$$

Per valutare la resistenza  $R$  per unita' di lunghezza della linea e' invece sufficiente applicare la relazione (2.8)

$$\begin{aligned} R &= \frac{R_s}{|I|^2} \int_{C_1+C_2} |\hat{n} \times \vec{H}|^2 dl = \\ &= \frac{R_s}{|I|^2} \left[ \int_0^{2\pi} \left| \hat{\rho} \times \hat{\phi} \frac{I}{2\pi a} \right|^2 a d\phi + \int_0^{2\pi} \left| -\hat{\rho} \times \hat{\phi} \frac{I}{2\pi b} \right|^2 b d\phi \right] = \\ &= \frac{R_s}{2\pi} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] = \frac{a+b}{2ab} \sqrt{\frac{\mu f}{\pi \sigma}}. \end{aligned}$$

□

## 2.2 Linee con piccole perdite

Come gia' visto nel primo capitolo, l'espressione della costante di propagazione  $k$  in funzione dei parametri primari della linea risulta

$$k = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}} = \omega \sqrt{(L - jR/\omega)(C - jG/\omega)}. \quad (2.9)$$

Supponiamo che siano verificate simultaneamente le condizioni:

$$R \ll \omega L, \quad G \ll \omega C, \quad (2.10)$$

cioè sia verificata l'*ipotesi di piccole perdite*. In tal caso è possibile scrivere l'eq. (2.9) nella forma

$$k = \omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - jR/\omega L} \sqrt{1 - jG/\omega C}, \quad (2.11)$$

sviluppare le due radici in cui compare la pulsazione  $\omega$  in serie di Taylor ed arrestare lo sviluppo al primo ordine. Entrambe le radici sono della forma  $\sqrt{1+u}$  con  $u \ll 1$ , per cui ricordando che lo sviluppo di tale espressione risulta

$$\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + \dots \quad (2.12)$$

e trascurando i termini del secondo ordine e superiori, si ottiene

$$k \simeq \omega\sqrt{LC} \left\{ 1 - j \left[ \frac{R}{2\omega L} + \frac{G}{2\omega C} \right] \right\} = \beta - j\alpha. \quad (2.13)$$

Si può subito notare che nel caso di piccole perdite la costante di fase

$$\beta \simeq \omega\sqrt{LC} \quad (2.14)$$

coincide con quella che si misurerebbe in assenza di perdite e, poiché la dipendenza dalla frequenza risulta lineare, la linea è non dispersiva. Per quanto riguarda invece la costante di attenuazione  $\alpha$ , essa risulta ben approssimata dall'espressione

$$\alpha \simeq \frac{1}{2} \sqrt{LC} \left[ \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{R}{R_0} + R_0 G \right], \quad (2.15)$$

dove con  $R_0 = \sqrt{L/C}$  si è indicata l'impedenza caratteristica che la linea presenterebbe in assenza di perdite. Anche se nelle ipotesi fatte la costante di attenuazione  $\alpha$  non dipende esplicitamente dalla frequenza, è da tenere in conto che le costanti primarie  $R$  e  $G$  sono quantità proporzionali rispettivamente alla radice della frequenza e alla frequenza per cui le varie componenti di frequenza di un segnale informativo saranno attenuate in modo diverso durante la loro propagazione nella linea e si assisterà a una distorsione del segnale informativo che risulterà sempre più rilevante quanto più la linea è lunga.

Per quanto riguarda l'impedenza caratteristica, sempre nell'ipotesi di piccole perdite, si avra'

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{L - jR/\omega}{C - jG/\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ \frac{\sqrt{1 - jR/\omega L}}{\sqrt{1 - jG/\omega C}} \right] = \\
 &\simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ \frac{1 + j\frac{1}{2\omega} \left( \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right) + \frac{RG}{4\omega^2 LC}}{1 + \frac{G^2}{4\omega^2 C^2}} \right] = \\
 &\simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 + j\frac{1}{2} \left( \frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \right] = R_0 + jX_0. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Il termine immaginario nelle parentesi quadre e' differenza di due quantita' per ipotesi molto piccole, per cui la parte immaginaria  $X_0$  dell'impedenza caratteristica e' generalmente trascurabile rispetto a quella reale. Di conseguenza l'impedenza caratteristica della linea puo' essere assunta reale e pari a quella che la stessa linea presenterebbe in assenza di perdite.

Nel caso in cui le perdite siano maggiori la costante di fase  $\beta$  non e' piu' in generale una funzione lineare della frequenza, la velocita' di fase  $v_f$  sara' funzione della frequenza e la linea risultera' dispersiva. Per evidenziare cio' e' sufficiente tenere in conto anche il termini quadratici nello sviluppo di Taylor:

$$\beta \simeq \omega\sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{G}{2\omega C} - \frac{R}{2\omega L} \right)^2 \right], \quad (2.17)$$

$$\alpha \simeq \frac{1}{2} \sqrt{LC} \left[ \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{R}{R_0} + R_0 G \right], \quad (2.18)$$

$$Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 + \frac{R^2}{8\omega^2 L^2} - \frac{3G^2}{8\omega^2 C^2} + \frac{RG}{4\omega^2 LC} + j\frac{1}{2} \left( \frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \right] \simeq R'_0. \quad (2.19)$$

Le relazioni (2.15) e (2.18) possono essere convenientemente impiegate per calcolare il valore della costante di attenuazione per unita' di lunghezza della linea, tuttavia tale valore raramente coincide con quello misurato, specialmente alle frequenza piu' elevate. Cio' in quanto le relazioni prescindono dalla inevitabile rugosita' della superficie dei conduttori della linea. L'effetto della rugosita' puo' essere considerato tramite la seguente relazione empirica:

$$\alpha = \alpha_s \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left( 1.4 \Delta^2 / \delta^2 \right) \right], \quad (2.20)$$

dove  $\alpha_s$  e' la costante di attenuazione valutata nel caso di conduttori perfettamente lisci,  $\Delta$  e' la rugosita' superficiale media e  $\delta$  la profondita' di penetrazione del conduttore.

Nel primo capitolo si era visto che l'impedenza caratteristica di una linea risulta reale anche in presenza di perdite nel caso sia verificata la condizione di Heaviside:

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{G}{\omega C}. \quad (2.21)$$

In tale ipotesi la costante di propagazione lungo la linea assume la forma

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}} = \omega \sqrt{(L - jR/\omega)(C - jG/\omega)} = \\ &= \omega \sqrt{LC} \sqrt{\left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right) \left(1 - j\frac{G}{\omega C}\right)} = \omega \sqrt{LC} \left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right) = \\ &= \omega \sqrt{LC} - jR \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega \sqrt{LC} - j\frac{R}{R_0} = \beta + j\alpha, \end{aligned} \quad (2.22)$$

dalla quale e' evidente che la costante di fase  $\beta = \omega \sqrt{LC}$  e' una funzione lineare della frequenza e la linea risulta non dispersiva anche se non e' soddisfatta la condizione di piccole perdite. Per tale motivo la condizione di Heaviside e' anche detta condizione di non distorsione (*distortionless condition*). Riguardo alla costante di attenuazione  $\alpha = R \sqrt{C/L} = R/R_0$  anche se questa esplicitamente non risulta dipendente dalla frequenza, lo e' attraverso il valore che la resistenza  $R$  per unita' di lunghezza assume al variare della frequenza. Tale variazione risulta comunque minore rispetto a quella che si ha nel caso di piccole perdite. Si noti che la resistenza  $R$  e la conduttanza  $G$  per unita' di lunghezza hanno una differente dipendenza dalla frequenza, per cui la condizione di Heaviside risulta rigorosamente soddisfatta alla sola frequenza di progetto, anche se in pratica puo' essere considerata con buona approssimazione soddisfatta per una banda relativamente ampia nell'intorno di tale frequenza. Per allargare tale banda di frequenza possono essere inserite periodicamente in serie alla linea delle opportune induttanze (*pupinizzazione*). Alternativamente e' possibile caricare periodicamente la linea con delle capacita' in parallelo alla linea (*krarupizzazione*).

Nel caso si operi a bassa frequenza l'ipotesi (2.10) di piccole perdite non sara' piu' verificata ma risulteranno valide le condizioni

$$R \gg \omega L, \quad G \gg \omega C. \quad (2.23)$$

In tal caso la costante di propagazione puo' essere approssimata dalla relazione

$$k = -j\sqrt{RG} \sqrt{1 + j\omega L/R} \sqrt{1 + j\omega C/G} = \\ \simeq -j\sqrt{RG} \left[ 1 + j\frac{1}{2} \left( \frac{\omega L}{R} + \frac{\omega C}{G} \right) \right], \quad (2.24)$$

da cui

$$\beta \simeq \frac{\sqrt{RG}}{2} \left[ \frac{\omega L}{R} + \frac{\omega C}{G} \right], \quad (2.25)$$

$$\alpha \simeq \sqrt{RG}. \quad (2.26)$$

Anche in questo caso la costante di fase  $\beta$  risulta direttamente proporzionale alla frequenza anche se, a causa del termine in parentesi quadra, avra' un valore molto piccolo. Per quanto riguarda l'impedenza caratteristica si ha

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R}{G}} \frac{\sqrt{1 + j\omega L/R}}{\sqrt{1 + j\omega C/G}} \simeq \sqrt{\frac{R}{G}} \left[ 1 + j\frac{1}{2} \left( \frac{\omega C}{G} - \frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad (2.27)$$

e, analogamente a quanto visto nel caso di alta frequenza, la parte immaginaria puo' essere trascurata rispetto a quella reale.

### 2.3 Linea con piccole perdite chiusa su un generico carico

Si consideri adesso il caso in cui una linea con piccole perdite sia chiusa su un generico carico  $Z_u$ . Anche se la costante di propagazione  $k = \beta - j\alpha$  risulta complessa, nel precedente paragrafo si era visto come, a causa delle ridotte perdite, l'impedenza caratteristica della linea puo' essere ancora considerata una quantita' reale  $Z_0 = R_0 \in \mathbb{R}^+$ . In tale ipotesi le espressioni relative alla corrente ed alla tensione lungo la linea risultano

$$V(z) = V_+ \exp(j\beta z) [1 + \Gamma(z)] \exp(\alpha z), \quad (2.28)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{R_0} \exp(j\beta z) [1 - \Gamma(z)] \exp(\alpha z), \quad (2.29)$$

dove

$$\Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) \exp(-2\alpha z). \quad (2.30)$$

Si noti che  $V_+$  rappresenta l'ampiezza dell'onda diretta di tensione in  $z = 0$ , per cui il termine  $\exp(\alpha z)$  nelle equazioni (2.28) e (2.29) tiene conto del fatto che l'onda diretta si attenua man mano che si propaga nella linea. Il coefficiente di riflessione contiene invece il fattore  $\exp(-2\alpha z)$  che tiene conto del fatto che sia l'onda diretta che quella riflessa dal carico cedono energia alla linea mentre si propagano in essa. Segue che il modulo del coefficiente di riflessione diminuisce allontanandosi dal carico mentre l'impedenza della linea,

$$\begin{aligned} Z(z) &= R_0 \frac{Z_u + R_0 \tan [(\beta - j\alpha)z]}{R_0 + Z_u \tan [(\beta - j\alpha)z]} = \\ &= R_0 \frac{1 + \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) \exp(-2\alpha z)}{1 - \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) \exp(-2\alpha z)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

non risulta essere piu' una quantita' periodica ed il suo valore tendera' a quello dell'impedenza caratteristica della linea per una linea infinitamente lunga ( $z \rightarrow \infty$ ). Cio' implica che qualora si volesse rappresentare l'andamento del coefficiente di riflessione nel piano dei fasori, cosi' come visto nel paragrafo 1.4.5, nel muoversi lungo la linea non si percorrerà piu' una circonferenza ma ci si sposterà su una spirale centrata nell'origine della carta. Se tuttavia la linea non e' troppo lunga il tratto di spirale percorso puo' essere generalmente assimilato ad una circonferenza.

Sempre nella ipotesi che l'impedenza della linea possa essere considerata come una quantita' puramente reale, la potenza attiva in ingresso alla linea, supposta di lunghezza  $\ell$  e chiusa sul carico  $Z_u$ , e' pari a

$$P(\ell) = \frac{1}{2} \mathcal{R}e [V(\ell) I^*(\ell)] = P_{inc}(\ell) [1 - |\Gamma(0)|^2 \exp(-4\alpha\ell)], \quad (2.32)$$

dove il termine

$$P_{inc}(\ell) = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \exp(2\alpha\ell) \quad (2.33)$$

rappresenta la potenza incidente su una sezione della linea posta a distanza  $\ell$  dal carico. La potenza dissipata sul carico risulta invece

$$P(0) = \frac{1}{2} \mathcal{R}e [V(0) I^*(0)] = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma(0)|^2], \quad (2.34)$$

da cui segue che la potenza dissipata nella linea e' esprimibile come:

$$P_\ell = P(\ell) - P(0) = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \left[ \left( \exp(2\alpha\ell) - 1 \right) + |\Gamma(0)|^2 \left( 1 - \exp(-2\alpha\ell) \right) \right]. \quad (2.35)$$

In quest'ultima relazione il primo termine nella parentesi quadra tiene conto della potenza persa dall'onda diretta mentre il secondo termine tiene conto della potenza persa dall'onda riflessa. Si noti che entrambi i termini aumentano all'aumentare delle perdite e quindi della costante di attenuazione  $\alpha$ . Esplicitando invece la potenza incidente all'ingresso della linea, la relazione (2.35) assume la forma:

$$P_\ell = P(\ell) - P(0) = P_{inc}(\ell) [1 - \exp(-2\alpha\ell)] [1 + |\Gamma(0)|^2 \exp(-2\alpha\ell)] . \quad (2.36)$$

**Esercizio 2.2** *Si consideri un cavo coassiale in aria avente impedenza  $R_0 = 100\Omega$  la cui parte finale risulta riempita, per il tratto  $\ell = 1\text{ cm}$ , da un materiale speciale avente impedenza caratteristica  $\zeta_1$ , pari ad un quarto di quella del vuoto, e costante di propagazione  $k_1 = (1 - j)\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ . Il cavo e' inoltre metallizzato al suo estremo tramite un conduttore elettrico perfetto. Si determini il rapporto tra il modulo dell'ampiezza dell'onda riflessa e quello dell'onda incidente presenti nel tratto di cavo in aria nel caso in cui la frequenza di lavoro sia pari a 3 GHz. Si calcoli quindi la potenza dissipata nel primo tratto (a partire dall'interfaccia aria/materiale speciale) di lunghezza  $d = 2\text{ mm}$  della struttura guidante riempita di materiale speciale.*

Dai dati del problema si puo' ricavare la lunghezza d'onda nel tratto in aria

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{f} = 10\text{ cm} ,$$

da cui segue

$$\ell = \lambda_0/10 .$$

Poiche' si suppone propagarsi in tutto il cavo un modo TEM, la costante di propagazione del tratto di linea riempita con il materiale speciale coincide con quella del materiale stesso  $k_1 = \beta_1 - j\alpha_1 = k_0 - jk_0$ . Tale ipotesi, insieme con il fatto che la metallizzazione al termine del cavo coassiale costituisce un corto circuito, fa si che il coefficiente di riflessione subito a destra dell'interfaccia aria/materiale speciale risulti:

$$\begin{aligned} \Gamma(\ell) &= \Gamma(0) \exp(-j2k_1\ell) = (-1) \exp(-j2\beta_1\ell) \exp(-2\alpha_1\ell) \\ &= -\exp(-j2k_0\ell) \exp(-2k_0\ell) = -0.285 \exp(-j0.4\pi) . \end{aligned}$$

Quindi lo spezzone di cavo riempito di materiale speciale chiuso in corto circuito si presenta all'interfaccia  $AA'$  come una impedenza equivalente pari

a

$$Z_{AA'} = Z(\ell) = Z_1 \frac{1 + \Gamma(\ell)}{1 - \Gamma(\ell)},$$

dove con  $Z_1$  si e' indicata l'impedenza caratteristica del tratto di cavo riempito con il materiale speciale. Poiche' la struttura guidante e' omogenea e, rispetto al tratto in aria, variano soltanto le caratteristiche elettriche e magnetiche ma non quelle geometriche, l'impedenza caratteristica  $Z_1$  e' legata a quella del tratto in aria,  $R_0$ , dalla relazione

$$Z_1 = R_0 \frac{\zeta_1}{\zeta_0} = R_0 \frac{\zeta_0/4}{\zeta_0} = R_0/4 \in \mathbb{R}^+,$$

da cui segue che il rapporto tra il modulo dell'ampiezza dell'onda riflessa e quello dell'onda incidente e' pari a

$$\frac{|V_-|}{|V_+|} = |\Gamma_{AA'}| = \left| \frac{Z_{AA'} - R_0}{Z_{AA'} + R_0} \right| = \left| \frac{\frac{R_0}{4} \frac{1+\Gamma(\ell)}{1-\Gamma(\ell)} - R_0}{\frac{R_0}{4} \frac{1+\Gamma(\ell)}{1-\Gamma(\ell)} + R_0} \right| = \left| \frac{-3 + 5\Gamma(\ell)}{5 - 3\Gamma(\ell)} \right| = 0.7.$$

La potenza dissipata nella linea riempita di materiale speciale risultera' pari alla potenza fluente nel tratto di guida in aria, e quindi:

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma_{AA'}|^2] = 2.55 |V_+|^2 \text{ mW}.$$

Tale potenza e' anche esprimibile in funzione dell'ampiezza dell'onda diretta  $V'_+$  sul carico  $Z_u$  come

$$P_d = P(\ell) = \frac{1}{2} \frac{|V'_+|^2}{Z_1} [\exp(2\alpha_1\ell) + |\Gamma(0)|^2 \exp(-2\alpha_1\ell)].$$

da cui si deduce che, essendo  $\exp(2\alpha_1\ell) \gg \exp(-2\alpha_1\ell)$ ,

$$\begin{aligned} |V'_+|^2 &= \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma_{AA'}|^2] \frac{Z_1}{[\exp(2\alpha_1\ell) + |\Gamma(0)|^2 \exp(-2\alpha_1\ell)]} = \\ &\simeq \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma_{AA'}|^2] Z_1 \exp(-2\alpha_1\ell). \end{aligned}$$

La precedente relazione permette di calcolare la potenza dissipata nel tratto

terminale della linea di lunghezza  $(\ell - d)$

$$\begin{aligned} P(\ell - d) &= \frac{1}{2} \frac{|V'_+|^2}{Z_1} \left[ \exp [2\alpha_1(\ell - d)] + |\Gamma(0)|^2 \exp [-2\alpha_1(\ell - d)] \right] = \\ &\simeq \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \left[ 1 - |\Gamma_{AA'}|^2 \right] \left[ \exp(2\alpha_1(\ell - d)) \exp(-2\alpha_1\ell) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \left[ 1 - |\Gamma_{AA'}|^2 \right] \exp(-2\alpha_1 d) \simeq 1.98 |V_+|^2 \text{ mW}, \end{aligned}$$

da cui si ricava che la potenza dissipata nel tratto  $d$  risulta

$$P_{\ell-d} = P(\ell) - P(\ell - d) \simeq 0.566 |V_+|^2 \text{ mW}.$$

□