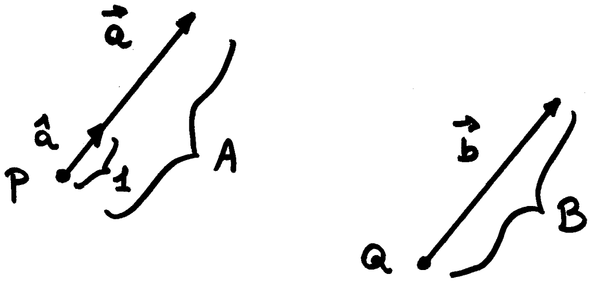
ANALISI VETTORIALE

DEF.

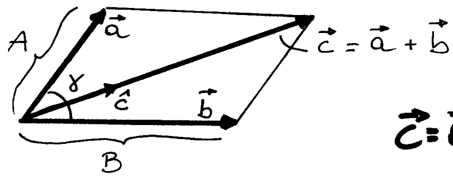
- **SCALARE** grandezza dotata di sola intensità A
- **VETTORE REALE** grandezza dotata di intensità $A \in \mathbb{R}$ e direzione $\hat{a}$ (adimensionale)
  $\vec{a} = A\hat{a}$
- **VERSORE** vettore reale $\hat{a}$ avente intensità unitaria

- Due vettori sono considerati uguali nel caso in cui abbiano stessa intensità e stessa direzione anche se applicati in due punti diversi dello spazio

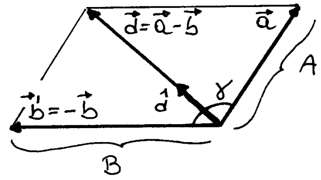


$\vec{a} = \vec{b}$

- La **SOMMA** di due vettori $\vec{a} = A\hat{a}$ e $\vec{b} = B\hat{b}$ da luogo a un vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ secondo la regola del parallelogramma



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \hat{c}\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\gamma}$$



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \hat{d}\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}$$

- Il **PRODOTTO** di un vettore $\vec{a}$ per uno scalare k produce una variazione dell'intensità del vettore $\vec{a}$ senza cambiarne la direzione

$$\vec{a} = A\hat{a} \Rightarrow k\vec{a} = (kA)\hat{a}$$

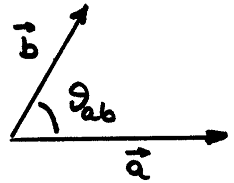
- Valgono le leggi

- ASSOCIATIVA	$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- COMMUTATIVA	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- DISTRIBUTIVA	$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
	$(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$

- **PRODOTTO SCALARE**

Si definisce prodotto scalare tra due generici vettori $\vec{a} = A\,\hat{a}$ e $\vec{b} = B\,\hat{b}$ la quantità SCALARE

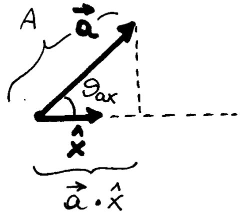
$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = AB\cos\vartheta_{ab}$



dove ϑ_{ab} è l'angolo compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

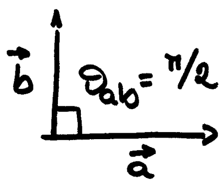
(poiché $\cos(\gamma) = \cos(-\gamma) = \cos(2\pi-\gamma) = \cos(\gamma-2\pi)$ è indifferente la scelta del verso dell'angolo ϑ_{ab})

- nel caso $\quad \vec{a}\cdot\hat{x} = A\cos\vartheta_{ax}$



"il risultato rappresenta la proiezione del vettore $\vec{a}$ lungo la direzione $\hat{x}$"

- nel caso in cui due vettori <u>reali</u> risultino tra loro spazialmente ortogonali il loro prodotto scalare risulterà nullo



$\vec{a}\cdot\vec{b} = AB\,\underbrace{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{=0} = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$

- Vale la legge

- COMMUTATIVA $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

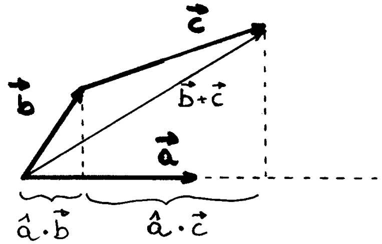
inoltre

$\vec{a}\cdot\vec{a} = A\,A\cos(0) = A^2 \qquad A\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad |\vec{a}| \triangleq \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = |A|$

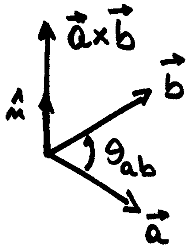
- il prodotto scalare è DISTRIBUTIVO rispetto alla somma

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$



- ## PRODOTTO VETTORIALE

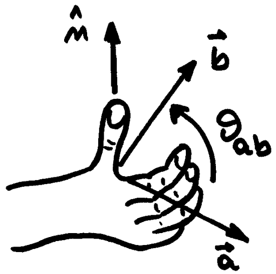
Si definisce prodotto vettoriale tra i vettori $\vec{a} = A\hat{a}$ e $\vec{b} = B\hat{b}$ il VETTORE



$$\vec{a}\times\vec{b} = AB\sin\vartheta_{ab}\,\hat{m}$$

dove

- $\hat{m}$ è un versore normale al piano contenente i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$



- ϑ_{ab} è l'angolo che si percorre per sovrapporre il vettore $\vec{a}$ al vettore $\vec{b}$ con la regola della "mano destra"

▸ <u>NON</u> vale la legge COMMUTATIVA, ma

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

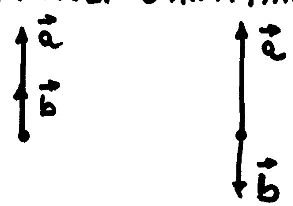
▸ se i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono PARALLELI o ANTI PARALLELI

$\vartheta_{ab} = n\pi$ $\Rightarrow \sin\vartheta_{ab} = 0$

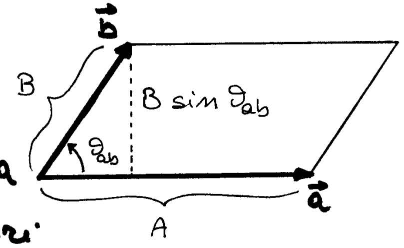
con $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = 0$$



▸ Se $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$ allora $|\vec{a}\times\vec{b}|$ rappresenta l'area del parallelogramma avente per lati i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$



▸ Il prodotto vettoriale è DISTRIBUTIVO rispetto alla SOMMA, cioè

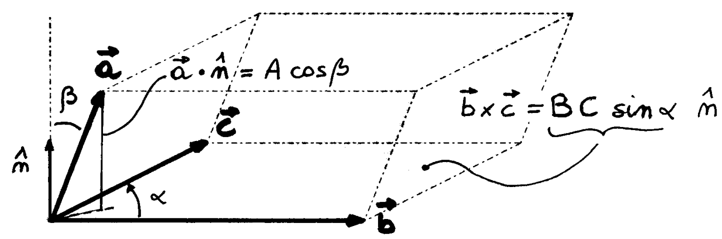
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

▸ <u>DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE</u>

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

▸ <u>PRODOTTO MISTO</u>

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

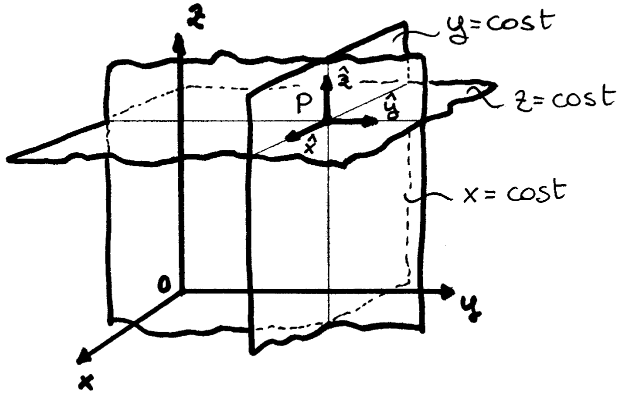


rappresenta il volume di un parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$

COORDINATE CARTESIANE

Sono definite dall'intersezione di tre piani ortogonali di equazione

$x = \text{cost}$, $\quad y = \text{cost}$, $\quad z = \text{cost}$



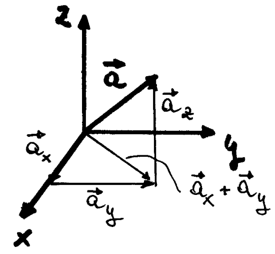
$$P(x, y, z) \qquad \begin{cases} u^1 = x & -\infty < x < +\infty \\ u^2 = y & -\infty < y < +\infty \\ u^3 = z & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

Le superfici individuano nel punto P di intersezione tre versori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ a loro ortogonali

$$\begin{cases} \hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0 \\ \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \end{cases}$$

▸ Un qualsiasi vettore $\vec{a}$ può essere rappresentato come somma di tre vettori paralleli rispettivamente ai versori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, cioè

$$\vec{a} = \underbrace{a_x \hat{x}}_{\vec{a}_x} + \underbrace{a_y \hat{y}}_{\vec{a}_y} + \underbrace{a_z \hat{z}}_{\vec{a}_z}$$



quindi

$$\vec{a} = \sum_{p=x,y,z} a_p \hat{p}$$

da cui

$$\vec{a} + \vec{b} = \sum_p a_p \hat{p} + \sum_p b_p \hat{p} = \sum_p (a_p + b_p)\hat{p}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\sum_p a_p \hat{p}\right)\cdot\left(\sum_q b_q \hat{q}\right) = \sum_p \sum_q a_p b_q \underbrace{\hat{p}\cdot\hat{q}}_{\delta_{pq} = \begin{cases}1 \text{ per } p=q \\ 0 \text{ per } p\neq q\end{cases}} =$$

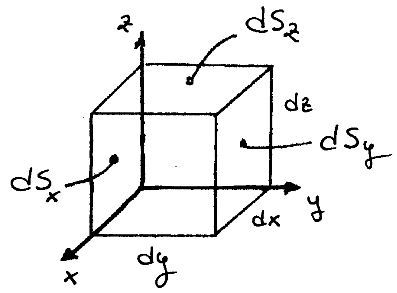
$$= \sum_p a_p b_p \hat{p}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\sum_p a_p \hat{p}\right)\times\left(\sum_q b_q \hat{q}\right) = \sum_p \sum_q a_p b_q \underbrace{\hat{p}\times\hat{q}}_{\substack{\neq 0 \text{ per } p\neq q \\ (1-\delta_{pq})\hat{n}}} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

- L'elemento di volume risulta

$$dV = dx\, dy\, dz$$

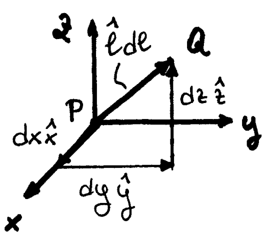


mentre gli elementi di superficie

$$\begin{cases} dS_x = dy\, dz \\ dS_y = dx\, dz \\ dS_z = dx\, dy \end{cases}$$

- Il vettore di lunghezza differenziale risulta

$$\hat{\ell}\, d\ell = dx\, \hat{x} + dy\, \hat{y} + dz\, \hat{z}$$



$\Rightarrow$ l'elemento differenziale di lunghezza risulta

$$d\ell^2 = \hat{\ell}\, d\ell \cdot \hat{\ell}\, d\ell =$$
$$= (dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}) \cdot (dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}) =$$
$$= dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- Si noti che per ogni posizione di P i versori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ hanno sempre la stessa direzione

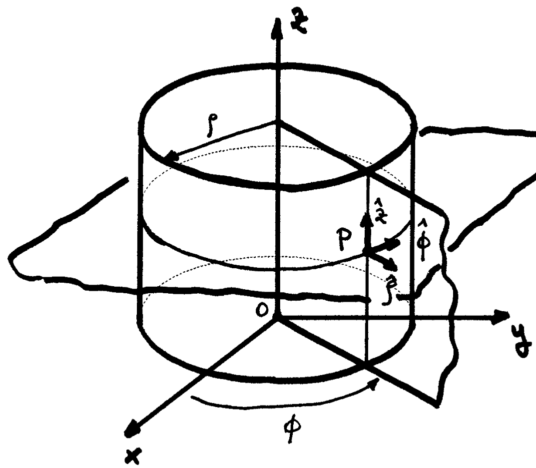
$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = 0$$

COORDINATE CILINDRICHE

La posizione del generico punto P è individuata dall'intersezione di:

- **un cilindro** di asse z e raggio ρ
  $$x^2 + y^2 = \rho^2$$
- **un semipiano** passante per l'asse z che forma un angolo ϕ con l'asse x
  $$\tan(\phi) = y/x$$
- **un piano** parallelo al piano xy
  $$z = \text{cost}$$

$$P(\rho, \phi, z)$$



$$\begin{cases} u^1 = \rho \\ u^2 = \phi \\ u^3 = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho < +\infty \\ 0 \le \phi < 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{array}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \text{atan}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

Le superfici individuano nel punto P di intersezione tre versori $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$ a loro ortogonali t.c.

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\phi} = \hat{\phi} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0 \qquad \hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$$

Nota

Un sistema di coordinate **ortogonali** (u^1, u^2, u^3) è descritto dai coefficienti metrici g_{11}, g_{22}, g_{33}, dove

$$g_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u^i}\right)^2 \qquad i = 1, 2, 3$$

x, y, z coordinate cartesiane

- L'elemento di lunghezza risulta

$$(dl)^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2 + g_{33}(du^3)^2$$

- Le distanze lungo gli assi coordinati

$$\sqrt{g_{11}}\, du^1, \quad \sqrt{g_{22}}\, du^2, \quad \sqrt{g_{33}}\, du^3$$

- L'elemento d'area sulla superficie u^i-u^j

$$dS_k = \left(\sqrt{g_{ii}}\, du^i\right)\left(\sqrt{g_{jj}}\, du^j\right) \qquad \text{con } \begin{matrix} i \neq k \\ j \neq k \end{matrix}$$

- L'elemento di volume

$$dV = \sqrt{g_{11}\, g_{22}\, g_{33}}\; du^1 du^2 du^3 =$$

$$= \sqrt{g}\; du^1 du^2 du^3$$

$$\text{con } g \triangleq g_{11}\, g_{22}\, g_{33}$$

$\Rightarrow$ per un sistema di riferimento cilindrico, essendo $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $z = z$, si ha

- $$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\sin\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 =$$

$$= \cos^2\phi + \sin^2\phi + 0 = 1$$

- $$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\rho\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\rho\sin\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 =$$

$$= \rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi + 0 = \rho^2$$

- $$g_{33} = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z}\rho\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\rho\sin\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 =$$

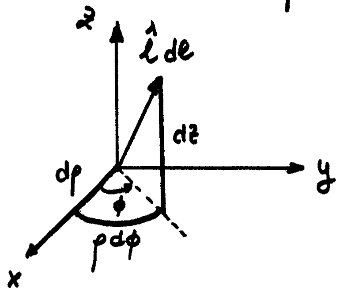
$$= 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = \rho^2, \quad g_{33} = 1$$

per cui per un sistema di coordinate cilindriche l'elemento di lunghezza risulta

$$(dl)^2 = g_{11}\, d\rho^2 + g_{22}\, d\phi^2 + g_{33}\, dz^2 =$$

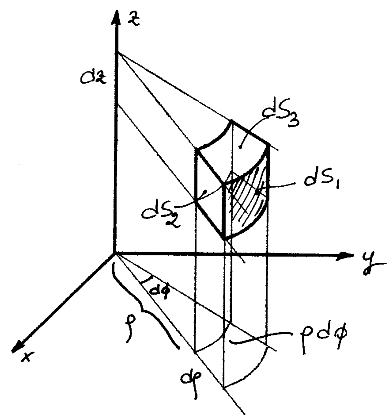
$$= d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$



$$\hat{l}\,dl = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\, d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

$$(dl)^2 = \hat{l}\,dl \cdot \hat{l}\,dl$$

Inoltre



$$\begin{cases} dS_1 = \rho\, d\phi\, dz \\ dS_2 = d\rho\, dz \\ dS_3 = d\rho\, \rho\, d\phi \end{cases}$$

e $\quad dV = d\rho\, \rho\, d\phi\, dz$

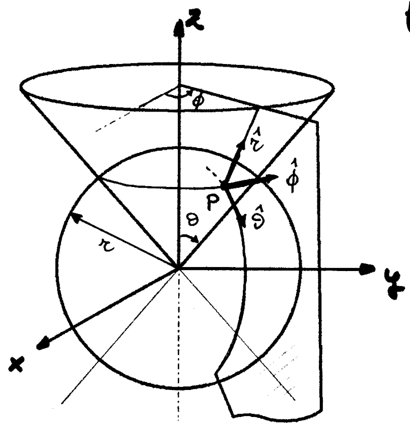
Si noti che per un sistema di coordinate cilindriche, contrariamente a quelle cartesiane, al variare del punto P nello spazio varia la direzione dei versori $\hat{\rho}$ e $\hat{\phi}$ per cui:

$\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi} = -\hat{\rho}$, $\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\rho} = \hat{\phi}$, mentre le altre derivate sono nulle

COORDINATE SFERICHE

La posizione del generico punto P e' individuata dall'intersezione di

- una sfera con centro nell'origine O e raggio r $\quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
- un cono circolare di asse z la cui generatrice forma un angolo ϑ con l'asse z $\quad \tan(\vartheta) = \sqrt{x^2+y^2}/z$
- un semipiano passante per l'asse z che forma un angolo ϕ con l'asse x
$$\tan(\phi) = y/x$$



$$P(r, \vartheta, \phi)$$

$u^1 = r \qquad 0 \le r < +\infty$

$u^2 = \vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$

$u^3 = \phi \qquad 0 \le \phi < 2\pi$

$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\phi \\ y = r \sin\vartheta \sin\phi \\ z = r \cos\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \vartheta = \mathrm{atan}\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right) \\ \phi = \mathrm{atan}(y/x) \end{cases}$$

Le superfici individuano nel punto P di intersezione tre versori $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ a loro ortogonali t.c.

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = \hat{\phi} \cdot \hat{r} = 0 \,, \quad \hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$$

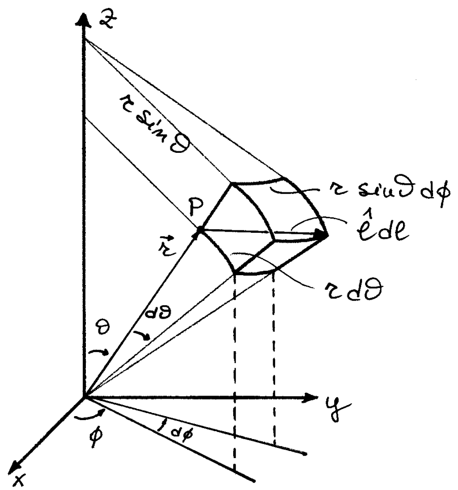
Per un sistema di coordinate sferico i coefficienti metrici risultano

$$g_{11} = 1 \,, \quad g_{22} = r^2 , \quad g_{33} = r^2 \sin^2\theta$$

per cui l'elemento di lunghezza risulta

$$(dl)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta \, d\phi^2$$

$$\hat{l}\, dl = dr\, \hat{r} + r\, d\theta\, \hat{\theta} + r \sin\theta \, d\phi \, \hat{\phi}$$



mentre gli elementi di superficie risultano

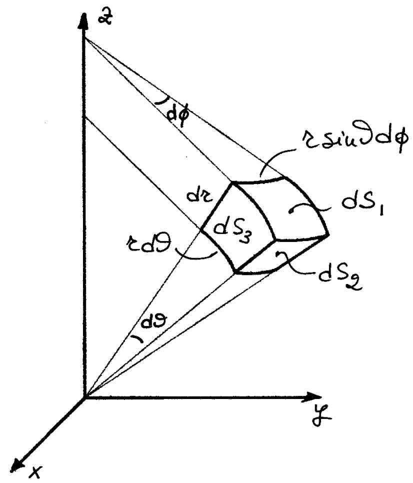
$$dS_1 = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$dS_2 = r \sin\theta \, dr \, d\phi$$

$$dS_3 = r \, dr \, d\theta$$

e l'elemento di volume

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$



Analogamente alle coordinate cilindriche al variare del punto P nello spazio varia la direzione dei versori $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$, per cui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta} \,, \quad \dfrac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r} \,, \quad \dfrac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \sin\theta \, \hat{\phi} \\ \dfrac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = \cos\theta \, \hat{\phi} \,, \quad \dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\left(\sin\theta \, \hat{r} + \cos\theta \, \hat{\theta} \right) \\ \text{le altre derivate sono nulle} \end{cases}$$

CONVERSIONE TRA SISTEMI DI COORDINATE

Sia $\vec{a}$ un vettore espresso in un sistema di coordinate ortogonali Σ_A e $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ i versori degli assi coordinati di un sistema di coordinate ortogonali Σ_B

$\Rightarrow$ per esprimere $\vec{a}$ nel nuovo sistema di coordinate Σ_B è sufficiente

$$\vec{a} = (\vec{a}\cdot\hat{u}_1)\hat{u}_1 + (\vec{a}\cdot\hat{u}_2)\hat{u}_2 + (\vec{a}\cdot\hat{u}_3)\hat{u}_3$$

Esempio

Sia $\vec{a}$ espresso in coordinate cilindriche $\vec{a} = a_\rho\hat{\rho} + a_\phi\hat{\phi} + a_z\hat{z}$ e supponiamo di volerlo rappresentare in coordinate cartesiane $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

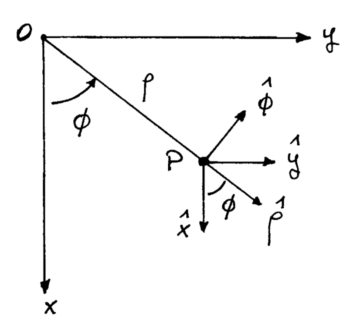
$$\vec{a} = (\vec{a}\cdot\hat{x})\hat{x} + (\vec{a}\cdot\hat{y})\hat{y} + (\vec{a}\cdot\hat{z})\hat{z} =$$

$$= a_\rho(\hat{\rho}\cdot\hat{x})\hat{x} + a_\phi(\hat{\phi}\cdot\hat{x})\hat{x} + a_z(\hat{z}\cdot\hat{x})\hat{x} +$$

$$+ a_\rho(\hat{\rho}\cdot\hat{y})\hat{y} + a_\phi(\hat{\phi}\cdot\hat{y})\hat{y} + a_z(\hat{z}\cdot\hat{y})\hat{y} +$$

$$+ a_\rho(\hat{\rho}\cdot\hat{z})\hat{z} + a_\phi(\hat{\phi}\cdot\hat{z})\hat{z} + a_z(\hat{z}\cdot\hat{z})\hat{z} =$$

dove



$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

per cui

$$\vec{a} = a_\rho(\cos\phi)\hat{x} + a_\phi(-\sin\phi)\hat{x} + a_z(0)\hat{x} +$$

$$+ a_\rho(\sin\phi)\hat{y} + a_\phi(\cos\phi)\hat{y} + a_z(0)\hat{y} +$$

$$+ a_\rho(0)\hat{z} + a_\phi(0)\hat{z} + a_z(1)\hat{z}$$

in forma matriciale

$$\vec{a} = \begin{bmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}a_\rho \\ a_\phi \\ a_z\end{bmatrix}$$

<u>Esempio</u> si esprime $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ in coordinate cilindriche

$$\hat{x} = (\hat{x}\cdot\hat{\rho})\hat{\rho} + (\hat{x}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} + (\hat{x}\cdot\hat{z})\hat{z} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}$$

$$\hat{y} = (\hat{y}\cdot\hat{\rho})\hat{\rho} + (\hat{y}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} + (\hat{y}\cdot\hat{z})\hat{z} = \sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$$

$$\hat{z} = (\hat{z}\cdot\hat{\rho})\hat{\rho} + (\hat{z}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} + (\hat{z}\cdot\hat{z})\hat{z} = \hat{z}$$

Passaggio coordinate sferiche ↔ rettangolari

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin\vartheta \cos\phi \, \hat{x} + \sin\vartheta \sin\phi \, \hat{y} + \cos\vartheta \, \hat{z} \\ \hat{\vartheta} = \cos\vartheta \cos\phi \, \hat{x} + \cos\vartheta \sin\phi \, \hat{y} - \sin\vartheta \, \hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi \, \hat{x} + \cos\phi \, \hat{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \sin\vartheta \cos\phi \, \hat{r} + \cos\vartheta \cos\phi \, \hat{\vartheta} - \sin\phi \, \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin\vartheta \sin\phi \, \hat{r} + \cos\vartheta \sin\phi \, \hat{\vartheta} + \cos\phi \, \hat{\phi} \\ \hat{z} = \cos\vartheta \, \hat{r} - \sin\vartheta \, \hat{\vartheta} \end{cases}$$